

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.5 Einige wichtige Ergänzungen

Bisher wurden vorwiegend Funktionen der Art

6/5/0

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

betrachtet, und gewisse Eigenschaften dieser Funktionen untersucht. Dabei traten immer wieder annähernd gleichlautende Definitionen und Sätze auf. Daher war es hilfreich, den Begriff des metrischen Raumes einzuführen, um grundlegende analytische Begriffe und Sätze nur einmal definieren bzw. beweisen zu müssen, um sie dann für die jeweils betrachteten konkreten metrischen Räume entsprechend interpretieren zu können.

Weiterhin haben wir beschränkte und abgeschlossene Teilmengen aus  $\mathbb{R}^n$  kompakt genannt. Dieser Begriff soll jetzt für beliebige metrische Räume neu definiert werden. Anschließend wird gezeigt, daß nach dieser neuen Definition die kompakten Mengen in  $\mathbb{R}^n$  genau die beschränkten und abgeschlossenen sind, so daß nachträglich die Bezeichnungswiese *kompakt* gerechtfertigt ist.

**Definition.** (*Überdeckung*)

6/5/1

Es sei  $(\mathbb{M}, \varrho)$  ein metrischer Raum und  $M \subseteq \mathbb{M}$ .

Weiterhin sei  $\mathcal{U}$  ein System von (offenen) Teilmengen von  $\mathbb{M}$  (also  $\mathcal{U} \subseteq \text{Pot}(\mathbb{M})$ ).

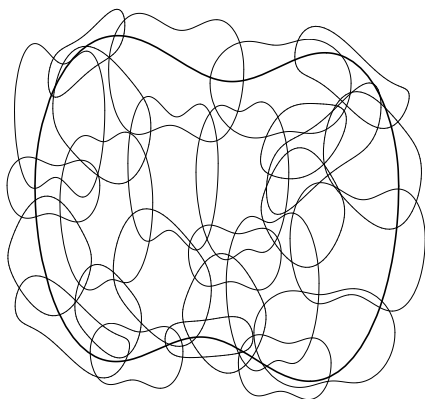
(1)  $\mathcal{U}$  ist eine (*offene*) *Überdeckung* von  $M$

$\overline{\text{Df}}$  Zu jedem  $a \in M$  existiert ein  $U \in \mathcal{U}$ , so daß  $a \in U$ .

(Die Mengen aus  $\mathcal{U}$  überdecken die Menge  $M$ ).

(2)  $\mathcal{U}$  ist eine *endliche Überdeckung* von  $M$

$\overline{\text{Df}}$   $\mathcal{U}$  ist eine Überdeckung von  $M$ , und  $\mathcal{U}$  enthält nur endlich viele Mengen.



6/5/2

Abb. 6.20

Die durch die dickere Strichstärke symbolisierte Menge sei  $M$ , die durch die dünnere Strichstärke gekennzeichneten Mengen bilden dann eine Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $M$ . In der Abbildung ist offensichtlich eine endliche Überdeckung dargestellt.

**Definition.** (*kompakt*)

6/5/3

Es sei  $(\mathbb{M}, \varrho)$  ein metrischer Raum und  $M \subseteq \mathbb{M}$ .

- (1)  $M$  ist kompakt  
 $\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Jede offene Überdeckung von } M \text{ enthält eine endliche Teilüberdeckung von } M$  (d.h., ist  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $M$ , dann existiert ein endliches Teilsystem  $\mathcal{U}_0 := \{U_1, \dots, U_m\} \subseteq \mathcal{U}$ , so daß schon  $\mathcal{U}_0$  die Menge  $M$  überdeckt).
- (2)  $(\mathbb{M}, \varrho)$  ist kompakt  
 $\stackrel{\text{Df}}{=} M = \mathbb{M}$  ist kompakt.

**Satz 6.22** (Überdeckungssatz von Heine-Borel)

6/5/4

Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ist  $M$  beschränkt und abgeschlossen, und ist  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $M$ , dann enthält  $\mathcal{U}$  eine endliche Teilüberdeckung von  $M$  (d.h.,  $M$  ist kompakt im Sinne der obigen Definition).

**Beweis.** (mit Würfelschachtelung)

6/5/5

Nach Voraussetzung ist  $M$  beschränkt, folglich ist  $M$  in einem Würfel  $W_0$  (mit endlicher Kantenlänge) enthalten, also  $M \subseteq W_0$  und  $M = M \cap W_0$ . Weiterhin ist  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $M$ .

Annahme: Es gibt keine endliche Teilüberdeckung von  $M \cap W_0$ .

Völlig analog wie im Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß (Satz 6.4) wird  $W_0$  in  $k := 2^n$  Teilwürfel  $W_0^1, \dots, W_0^k$  durch Halbierung der Kantenlängen zerlegt. Folglich ist

$$W_0 = \bigcup_{i=1}^k W_0^i \quad \text{und} \quad M \cap W_0 = M \cap \bigcup_{i=1}^k W_0^i = \bigcup_{i=1}^k (M \cap W_0^i).$$

Dann gibt es wenigstens einen Teilwürfel  $W_0^i := W_1$ , so daß  $M \cap W_0^i = M \cap W_1$  durch kein endliches Teilsystem von  $\mathcal{U}$  überdeckt wird. Induktiv schließt man weiter. (Da der Induktionsschritt völlig analog zum Anfangsschritt erfolgt, wird er hier weggelassen.)

Es entsteht eine Würfelschachtelung  $W_0 \supseteq W_1 \supseteq W_2 \supseteq \dots$ , so daß  $M \cap W_i$  durch kein endliches Teilsystem von  $\mathcal{U}$  überdeckt wird und die Kantenlänge des  $i$ -ten Würfels,  $l(W_i)$ , durch  $l(W_i) = \frac{1}{2^i} \cdot l(W_0)$  gegeben ist.

Analog wie im Beweis von Satz 6.4 schachtelt die konstruierte Würfelreihe einen Punkt  $\bar{c} \in \mathbb{R}$  ein, d.h.,  $\bar{c} \in \bigcap_{i=0}^{\infty} W_i$ .

Offenbar ist jede der Mengen  $M \cap W_i$  unendlich, da sonst  $M \cap W_i$  schon durch ein endliches Teilsystem von  $\mathcal{U}$  überdeckt wird.

Sei  $\varepsilon' > 0$ . Wir betrachten  $U_{\varepsilon'}(\bar{c})$  und wählen  $i$  so groß, daß  $W_i \subseteq U_{\varepsilon'}(\bar{c})$  und damit  $M \cap W_i \subseteq U_{\varepsilon'}(\bar{c})$ . Dann liegen in jeder  $\varepsilon'$ -Umgebung von  $\bar{c}$  unendlich viele Elemente aus  $M$ . Folglich ist  $\bar{c}$  ein Häufungspunkt von  $M$ . Da  $M$  abgeschlossen ist, gehört  $\bar{c}$  zu  $M$ . Folglich gibt es eine offene Menge  $U \in \mathcal{U}$ , so daß  $\bar{c} \in U$ . Mit  $\bar{c}$  gehört noch eine ganze  $\varepsilon$ -Umgebung zu  $U$ . Es existiert also ein  $\varepsilon > 0$ , so daß  $U_{\varepsilon}(\bar{c}) \subseteq U$ . Wir wählen  $i$  jetzt so groß, daß  $W_i \subseteq U_{\varepsilon}(\bar{c})$ . Dann ist  $M \cap W_i \subseteq U$ , folglich wird  $M \cap W_i$  schon durch **eine** Menge  $U \in \mathcal{U}$  überdeckt. Dies ist ein Widerspruch dazu, daß  $M \cap W_i$  durch kein endliches Teilsystem von  $\mathcal{U}$  überdeckt wird. Damit ist die obige Annahme falsch und der Satz bewiesen.  $\square$

Es gilt auch die Umkehrung des letzten Satzes.

6/5/6

**Satz 6.23** *Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ .*

6/5/7

*Ist  $M$  kompakt (im Sinne der Definition in metrischen Räumen), dann ist  $M$  beschränkt und abgeschlossen (in  $\mathbb{R}$ ).*

**Beweis.** Annahme: Es gilt nicht:  $M$  ist beschränkt und abgeschlossen.

6/5/8

Dann ist  $M$  nicht beschränkt oder nicht abgeschlossen.

Fall 1.  $M$  ist nicht beschränkt.

Dann gibt es eine unbeschränkte Folge  $(\bar{x}_i)$  in  $M$ , so daß  $|\bar{x}_{i+1}| \geq |\bar{x}_i| + 1$  für jedes  $i$ .

Sei  $\mathcal{U} := \{U_{\frac{1}{4}}(\bar{x}) : \bar{x} \in M\}$ .

Offenbar ist  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Es gibt aber kein endliches Teilsystem  $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ , durch das  $M$  überdeckt wird, denn jedes solche  $\mathcal{U}_0$  könnte z.B. höchstens endlich viele der Folgeglieder überdecken, da diese zueinander einen Abstand der Größe wenigstens 1 haben. **M!**

Fall 2.  $M$  ist nicht abgeschlossen.

Dann gibt es einen Häufungspunkt  $\bar{a}$  von  $M$  mit  $\bar{a} \notin M$ .

Für jedes  $\bar{x} \in M$  ist somit  $\bar{x} \neq \bar{a}$ , also  $|\bar{x} - \bar{a}| := \varepsilon_{\bar{x}} > 0$ .

Folglich ist  $\mathcal{U} := \{U_{\frac{\varepsilon_{\bar{x}}}{4}}(\bar{x}) : \bar{x} \in M\}$  eine offene Überdeckung von  $M$ .

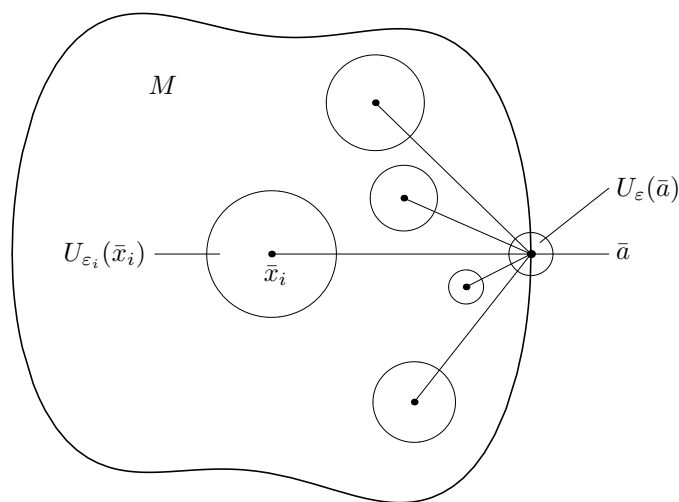
Behauptung: Kein endliches Teilsystem  $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$  überdeckt  $M$ .

Ist  $\mathcal{U}_0 = \{U_{\varepsilon_1}(\bar{x}_1), \dots, U_{\varepsilon_m}(\bar{x}_m)\}$  ein beliebiges endliches Teilsystem von  $\mathcal{U}$  und

$\varepsilon_i := \varepsilon_{\frac{\bar{x}_i}{4}}$ , dann sei  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\} = \min\{\frac{|\bar{x}_i - \bar{a}|}{4} : i = 1, \dots, m\}$ .

Folglich ist  $U_{\varepsilon}(\bar{a}) \cap U_{\varepsilon_i}(\bar{x}_i) = \emptyset$  (vgl. Abb. 6.21).

Da  $\bar{a}$  ein Häufungspunkt von  $M$  ist, existiert ein  $\bar{y} \in M$ , so daß  $\bar{y} \in U_{\varepsilon}(\bar{a})$  und  $\bar{y} \notin U_{\varepsilon_i}(\bar{x}_i)$  für  $i = 1, \dots, m$ , daher wird  $\bar{y}$  durch  $\mathcal{U}_0$  nicht überdeckt. Folglich gibt es kein endliches Teilsystem  $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ , welches  $M$  überdeckt. **M!**  $\square$



6/5/9

Abb. 6.21 Offensichtlich ist  $U_{\varepsilon}(\bar{a}) \cap U_{\varepsilon_i}(\bar{x}_i) = \emptyset$  für alle  $\bar{x}_i \in M$ . Die  $\varepsilon_i$ -Umgebungen von  $\bar{x}_i$  haben einen Radius von  $\frac{|\bar{x}_i - \bar{a}|}{4}$ .

Aus den letzten beiden Sätzen ergibt sich trivialerweise das folgende Korollar, das häufig ebenfalls als Überdeckungssatz von Heine-Borel bezeichnet wird.

**Korollar.** (*Überdeckungssatz von Heine-Borel*)

6/5/10

Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ .

$M$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\iff M$  ist kompakt.

Aus dem Korollar zu Satz 3.9 folgt, daß jede Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$  konvergiert, d.h., sie besitzt dort einen Grenzwert. Das analoge Resultat gilt für Cauchyfolgen in  $\mathbb{R}^n$ . In  $\mathbb{Q}$  konvergieren Cauchyfolgen i.a. nicht, z.B. ist  $(1 + \frac{1}{n})^n$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{Q}$ , die in  $\mathbb{Q}$  aber keinen Grenzwert besitzt.

6/5/11

Es gibt also metrische Räume, in denen Cauchyfolgen immer konvergieren und solche, in denen das nicht der Fall ist. Dies gibt Anlaß zu der folgenden Definition.

**Definition.** (*Vollständigkeit*)

6/5/12

Ein metrischer Raum  $(\mathbb{M}, \varrho)$  ist *vollständig*

$\iff$  Jede Cauchyfolge aus  $(\mathbb{M}, \varrho)$  konvergiert in  $(\mathbb{M}, \varrho)$ .

Hieraus ergibt sich sofort, daß  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}$  vollständige metrische Räume sind und  $\mathbb{Q}$  unvollständig ist.

6/5/13