

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Satz 6.2 Für alle $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt:

6/1/7

- (1) $|\bar{a}| \geq 0$, und $|\bar{a}| = 0 \iff \bar{a} = \bar{0}$.
- (2) $|r \cdot \bar{a}| = |r| \cdot |\bar{a}|$.
 $(\implies |-\bar{a}| = |\bar{a}| \text{ und } |\bar{a} - \bar{b}| = |\bar{b} - \bar{a}|)$. (Symmetrie des Abstands)
- (3) $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$. (Dreiecksungleichung)
- (4) $|\bar{a} - \bar{b}| \leq |\bar{a} - \bar{c}| + |\bar{c} - \bar{b}|$, $\left. \vphantom{\begin{matrix} (4) \\ (5) \end{matrix}} \right\}$ (Formen der Dreiecksungleichung)
- (5) $||\bar{a}| - |\bar{b}|| \leq |\bar{a} - \bar{b}|$.

Definition. (Konvergenz in metrischen Räumen)

6/1/35

Sei (x_n) eine Folge in \mathbb{M} und $a \in \mathbb{M}$.

(x_n) konvergiert gegen a (in \mathbb{M})

$\stackrel{\text{Df}}{=} \text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } n_0, \text{ so daß für jedes } n \geq n_0 \text{ gilt: } \varrho(x_n, a) < \varepsilon$

(d.h., für fast alle n ist der Abstand zwischen x_n und a kleiner als ε , oder in jeder ε -Umgebung von a liegen fast alle Folgenglieder).

Bez.: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ oder kurz $x_n \rightarrow a$.

Übungsaufgaben

2. Zeigen Sie: Ist (\bar{x}_i) eine Folge in \mathbb{R}^n , $\bar{x}_i = (x_{1i}, \dots, x_{ni})$, und $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, dann gilt:

6/6/2

(\bar{x}_i) konvergiert gegen \bar{a} gdw (x_{ki}) gegen a_k konvergiert, $k = 1, \dots, n$.