

Kapitel 4 Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Beispiel. (Geometrische Reihe)

4/1/3

Sei $|a| < 1$ und $a \neq 0$.

Dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ gegen $\frac{1}{1-a}$; ($\sum a^i$ heißt *geometrische Reihe*).

Beweis. Für $S_n = 1 + a + \cdots + a^n$ ist

$$\begin{aligned} S_n(1-a) &= (1 + \cdots + a^n)(1-a) = 1 + \cdots + a^n - (a + \cdots + a^{n+1}) \\ &= 1 - a^{n+1}. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Damit ist der Wert der n -ten Partialsumme berechnet.

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0$ erhält man aus den Eigenschaften konvergenter Folgen (vgl. Beispiel 2 in Kapitel 3, vor dem Satz 3.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a^{n+1})}_{=1} = \frac{1}{1 - a}.$$

Also

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1 - a}.$$

Satz 4.4 Es seien $\sum a_i$, $\sum b_i$ konvergent und $a, b \in \mathbb{R}$.

4/1/19

Dann ist $\sum (a \cdot a_i + b \cdot b_i)$ konvergent und $\sum (a \cdot a_i + b \cdot b_i) = a \cdot \sum a_i + b \cdot \sum b_i$.

Satz 4.8 (Majorantenkriterium)

4/1/32

Es seien $\sum a_i$, $\sum b_i$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern, und es sei $\sum b_i$ eine Majorante von $\sum a_i$. Dann gilt:

- (1) Ist $\sum b_i$ konvergent, so ist auch $\sum a_i$ konvergent.
- (2) Ist $\sum a_i$ divergent, so ist auch $\sum b_i$ divergent.

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.1 Der Raum \mathbb{R}^n

Definition. (*metrischer Raum*)

6/1/10

Es sei \mathbb{M} eine nicht-leere Menge und $\varrho : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ (d.h., für $a, b \in \mathbb{M}$ ist $\varrho(a, b) \in \mathbb{R}$), so daß für alle $a, b, c \in \mathbb{M}$ gilt:

- (1) $\varrho(a, b) \geq 0$, und $\varrho(a, b) = 0 \iff a = b$.
- (2) $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$. (Symmetrie)
- (3) $\varrho(a, b) \leq \varrho(a, c) + \varrho(c, b)$. (Dreiecksungleichung)

Dann ist ϱ eine *Metrik* oder *Abstandsfunktion* in \mathbb{M} , und das Paar (\mathbb{M}, ϱ) heißt *metrischer Raum*.

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. (*Stetigkeit in metrischen Räumen*)

6/2/2

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $a \in \mathbb{M}_1$.

f ist in a *stetig*

$\stackrel{\text{Df}}{=} a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

(Andere Formulierung: Wenn $x \in U_\delta(a)$, so $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.)

Übungsaufgaben

5. Es sei M die Menge aller Folgen $t = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ aus Nullen und Einsen.

6/6/5

Für $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ und $t = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ aus M sei

$$\rho(s, t) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}. \quad (\star)$$

Die Abbildung $f : M \rightarrow M$ sei definiert durch $f((t_0, t_1, t_2, \dots)) = (t_1, t_2, t_3, \dots)$.

- (a) Zeigen Sie, daß die Reihe (\star) konvergiert und ρ eine Metrik auf M ist.
- (b) Berechnen Sie den Abstand von $s = (0, 0, 0, \dots)$ und $t = (0, 1, 0, 1, \dots)$.
- (c) Zeigen Sie

i. Wenn $s_i = t_i$ für $i = 0, \dots, n$, so $\rho(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$.

ii. Wenn $n \geq 1$ und $\rho(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$, so $s_i = t_i$ für $i = 0, \dots, n-1$.

- (d) Untersuchen Sie, ob die Abbildung f stetig ist.