

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.3 Elementare Funktionen

Satz 5.16 *sin und cos haben folgende Eigenschaften:*

5/3/47

- (1) *sin und cos sind in \mathbb{R} definiert, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.*
- (2) *sin ist ungerade und cos ist gerade.*
- (3) *$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ ($\implies \sin 2x = 2 \sin x \cos x$).*
- (4) *$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ ($\implies \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$).*
- (5) *$\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$.*
- (6) *$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2}$.*
- (7) *$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ($\implies |\sin x|, |\cos x| \leq 1$).*
- (8) *sin und cos sind stetig.*

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. (*Grenzwert*)

6/2/8

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$, a ein Häufungspunkt von $D(f)$ und $c \in \mathbb{M}_2$.

f besitzt in a den Grenzwert c

$\overline{\text{Def}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ mit $x \neq a$ gilt:

Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), c) < \varepsilon$.

Bez.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ oder $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$.

Übungsaufgaben

7. Zeigen Sie für $\bar{x} = (x, y)$ und $\bar{0} = (0, 0)$:

6/6/7

$$(a) \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy} = -\frac{1}{4},$$

$$(b) \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1,$$

$$(c) \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{\sin(xy)}{x} = 0.$$

[Für (b) und (c) benutze man die Ungleichung $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ für „kleine“ x .]