

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### Übungsaufgaben

1. Untersuchen Sie die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  auf Stetigkeit an der Stelle  $(0, 0)$ , wobei: 6/6/1

$$(a) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2. Zeigen Sie: Ist  $(\bar{x}_i)$  eine Folge in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x}_i = (x_{1i}, \dots, x_{ni})$ , und  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ , 6/6/2  
dann gilt:

$(\bar{x}_i)$  konvergiert gegen  $\bar{a}$  gdw  $(x_{ki})$  gegen  $a_k$  konvergiert,  $k = 1, \dots, n$ .

3. Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ . Zeigen Sie: 6/6/3

$$(a) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = y = 0 \end{cases}$$

ist in  $(0, 0)$  nicht stetig.

$$(b) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin(xy) & \text{für } x \neq 0, \\ y & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist in jedem Punkt  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  stetig.

[Man benutze die Ungleichung:  $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$  für „kleine“  $x$ .]

4. Es sei  $f$  die durch  $f(x, y) = x^y$  definierte Funktion, deren Definitionsbereich die Halbebene  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$  ist. 6/6/4

Zeigen Sie, daß  $f$  stetig ist, und untersuchen Sie diese Funktion auf Existenz und Größe von Grenzwerten in den Randpunkten des Definitionsbereiches.

(Hinweis: Definition von  $x^y$  beachten!)

5. Es sei  $M$  die Menge aller Folgen  $t = (t_0, t_1, t_2, \dots)$  aus Nullen und Einsen. 6/6/5  
Für  $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$  und  $t = (t_0, t_1, t_2, \dots)$  aus  $M$  sei

$$\rho(s, t) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}. \quad (\star)$$

Die Abbildung  $f : M \rightarrow M$  sei definiert durch  $f((t_0, t_1, t_2, \dots)) = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ .

- (a) Zeigen Sie, daß die Reihe  $(\star)$  konvergiert und  $\rho$  eine Metrik auf  $M$  ist.  
(b) Berechnen Sie den Abstand von  $s = (0, 0, 0, \dots)$  und  $t = (0, 1, 0, 1, \dots)$ .  
(c) Zeigen Sie

- i. Wenn  $s_i = t_i$  für  $i = 0, \dots, n$ , so  $\rho(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$ .  
 ii. Wenn  $n \geq 1$  und  $\rho(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$ , so  $s_i = t_i$  für  $i = 0, \dots, n-1$ .
- (d) Untersuchen Sie, ob die Abbildung  $f$  stetig ist.
6. Es sei  $\mathcal{F}$  die Menge aller Folgen von reellen Zahlen. Für zwei beliebige Elemente  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$  von  $\mathcal{F}$  sei  $\rho(x, y)$  wie folgt definiert: 6/6/6
- $$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$
- Beweisen Sie, daß  $\rho$  eine Abbildung von  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$  in  $\mathbb{R}$  mit den folgenden Eigenschaften ist:
- (a)  $\rho(x, y) \geq 0$  für alle  $x, y \in \mathcal{F}$ ,  
 (b)  $\rho(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$ ,  
 (c)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  für alle  $x, y \in \mathcal{F}$ .
7. Zeigen Sie für  $\bar{x} = (x, y)$  und  $\bar{0} = (0, 0)$ : 6/6/7
- (a)  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy} = -\frac{1}{4}$ ,  
 (b)  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$ ,  
 (c)  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{\sin(xy)}{x} = 0$ .
- [Für (b) und (c) benutze man die Ungleichung  $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$  für „kleine“  $x$ .]
8. Es sei  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$  und  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$  für  $(x, y) \in M$ . 6/6/8  
 In welchen Punkten  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  besitzt  $f$  einen Limes?
9. Skizzieren Sie (Zeichnung) den Verlauf der folgenden durch Parameterdarstellung gegebenen Kurven: 6/6/9
- (a)  $f(x) = (2 \cos x, 3 \sin x)$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ .  
 (b)  $f(x) = (2 \cos^3 x, 2 \sin^3 x)$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ . (Astroide).
10. Man zeige mit Hilfe der Definition, daß die Funktion  $f(x) = x^2$  in dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  mit  $0 \leq a < b$  gleichmäßig stetig ist. 6/6/10
11. Es sei  $(\mathbb{M}, \varrho)$  ein metrischer Raum und  $a \in \mathbb{M}$ . 6/6/11  
 Zeigen Sie, daß die Funktion  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \varrho(x, a)$  in  $\mathbb{M}$  stetig ist.  
 Ist  $f$  in  $\mathbb{M}$  auch gleichmäßig stetig?
12. Es sei  $(\mathbb{M}, \varrho)$  ein metrischer Raum und  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \varrho(x, a)$  stetig in  $\mathbb{M}$ . Zeigen Sie: 6/6/12
- (a) Ist  $M_0 \subseteq \mathbb{M}$  abgeschlossen, dann ist  $A := \{x \in M_0 : f(x) = 0\}$  abgeschlossen.

- (b) Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  sind die Mengen  
 $A_a := \{x \in \mathbb{M} : f(x) > a\}$  und  $A_b := \{x \in \mathbb{M} : f(x) < b\}$  offen.
13. Welche der folgenden Mengen sind kompakt? 6/6/13
- (a)  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(n - \frac{3}{5}, n + \frac{3}{5}\right)$  in  $\mathbb{R}$ ,
- (b)  $A = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right]\right)$  in  $\mathbb{R}$ ,
- (c)  $A = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in [0, 1]\}$  in  $\mathbb{R}^2$ ,
- (d)  $A = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$  in  $\mathbb{R}^2$ ,
- (e)  $A = \{(x_1, x_2) : x_2 \leq 2x_1 + 1\}$  in  $\mathbb{R}^2$ .
14.  $A, B$  seien Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie: 6/6/14
- (a) Sind  $A$  und  $B$  kompakt, dann ist auch  $A \cup B$  kompakt.
- (b) Ist  $A$  kompakt und  $B$  abgeschlossen, dann ist  $A \cap B$  kompakt.
15. Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, daß  $A$  genau dann kompakt ist, wenn jede unendliche Teilmenge von  $A$  einen Häufungspunkt in  $A$  besitzt. 6/6/15
16. Es sei  $M = \{x : 0 \leq x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}$  und  $\mathcal{U}$  ein System von Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , so daß 6/6/16
- $$\mathcal{U} = \{U(x) : U(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right) \text{ und } 0 < x < 1\} \cup \{U_\varepsilon(0)\},$$
- wobei  $\varepsilon > 0$  beliebig.
- (a) Zeigen Sie, daß  $\mathcal{U}$  eine Überdeckung von  $M$  ist und wählen Sie ein endliches Teilsystem  $\mathcal{U}_0$  von  $\mathcal{U}$  aus, durch das  $M$  bereits überdeckt wird.
- (b) Zeigen Sie, daß  $\mathcal{U}' = \{U(x) : U(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right) \text{ und } 0 < x < 1\}$  eine Überdeckung von  $M' = \{x : 0 < x < 1\}$  ist und daß es kein endliches Teilsystem  $\mathcal{U}'_0 \subseteq \mathcal{U}'$  gibt, so daß  $M'$  durch  $\mathcal{U}'_0$  überdeckt wird.
17. Es sei  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$  mit  $g(t) = (t, t^2)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , und  $\mathfrak{k}$  die durch  $g$  definierte Kurve in der Ebene. Betrachtet man zu jedem Punkt  $\bar{x}$  von  $\mathfrak{k}$  die  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(\bar{x})$  mit  $\varepsilon = \frac{1}{5}$ , dann erhält man eine offene Überdeckung  $\mathcal{U} = \{U_\varepsilon(\bar{x}) : \bar{x} \in \mathfrak{k}\}$  von  $\mathfrak{k}$ . 6/6/17
- Geben Sie endlich viele zu  $\mathcal{U}$  gehörende Mengen an, die bereits  $\mathfrak{k}$  vollständig überdecken (mit Zeichnung).