

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Satz 5.2 Sei $a \in D(f)$ und a ein Häufungspunkt von $D(f)$. Dann gilt:
 f ist in a stetig gdw $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert und $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

5/2/12

Kapitel 7 Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Definition. (Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient)

7/1/3

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) differenzierbar

\equiv f ist in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es existiert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in a .

Bez. $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

Satz 7.5 (Kettenregel)

7/1/23

Ist g in a und f in $g(a)$ differenzierbar, dann ist $f \circ g$ in a differenzierbar, und es ist $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$ („äußere Ableitung mal innere Ableitung“).

Beweis. Es sei $b = g(a)$, dann ist f nach Voraussetzung in b differenzierbar. Folglich existiert $\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b)$, und für $y - b := k$ ist $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(b+k) - f(b)}{k} = f'(b)$.

7/1/24

Wir definieren jetzt eine für den Beweis nützliche Hilfsfunktion:

$$\psi(k) = \begin{cases} \frac{f(b+k) - f(b)}{k} - f'(b), & \text{für } k \neq 0, \\ 0, & \text{für } k = 0. \end{cases}$$

Dann ist ψ in $k = 0$ stetig, denn $\lim_{k \rightarrow 0} \psi(k) = 0 = \psi(0)$.

Damit gilt für alle k in einer Umgebung $U(0)$:

$$f(b+k) - f(b) = k \cdot f'(b) + k \cdot \psi(k). \quad (\star)$$

Weiterhin sei $x := a + h$ und $\varphi(h) := g(a+h) - g(a)$. Dann ist $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0 = \varphi(0)$, und damit ist φ in 0 stetig. Folglich gilt

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} =$$

$$\frac{f(\varphi(h) + g(a)) - f(g(a))}{h} := (\star\star)$$

Ersetzt man in (\star) k durch $\varphi(h)$, dann erhält man

$$(\star\star) = \frac{f(b+k) - f(b)}{h} = \frac{k \cdot f'(b) + k \cdot \psi(k)}{h} =$$

$$\frac{\varphi(h)}{h} \cdot f'(b) + \frac{\varphi(h)}{h} \cdot \psi(\varphi(h)).$$

Es ist

$$\frac{\varphi(h)}{h} = \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(a),$$

denn g ist in a differenzierbar. Weiterhin sind ψ und φ in 0 stetig, folglich gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \psi(\varphi(h)) = \psi(\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h)) = \psi(\underbrace{\varphi(0)}_{=0}) = \psi(0) = 0.$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{\varphi(h)}{h} \cdot f'(b)}_{\rightarrow g'(a)} + \frac{\varphi(h)}{h} \cdot \underbrace{\psi(\varphi(h))}_{\rightarrow 0} \right) &= \end{aligned}$$

$$f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a). \quad \square$$