

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Satz 5.2 Sei $a \in D(f)$ und a ein Häufungspunkt von $D(f)$. Dann gilt: 5/2/12
 f ist in a stetig gdw $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert und $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Satz 5.8 Ist f in $[a, b]$ injektiv und stetig, dann ist f^{-1} in $[\alpha, \beta]$ stetig, wobei 5/2/27
 $\alpha = \min\{f(a), f(b)\}$ und $\beta = \max\{f(a), f(b)\}$.

Kapitel 7 Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Satz 7.6 (Ableitung der Umkehrfunktion) 7/1/25

Ist f in einer Umgebung $U(a)$ von a stetig und streng monoton, und ist f in a differenzierbar und $f'(a) \neq 0$, dann ist f^{-1} in $b := f(a)$ differenzierbar, und es ist
 $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Beweis. Nach Satz 5.8 ist f^{-1} in einer Umgebung von $b = f(a)$ stetig. Für $x \in U(a)$ 7/1/26
 ist $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$; insbesondere ist $a = f^{-1}(b)$. Dann gilt

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}.$$

Wenn $y \rightarrow b$, also $f(x) \rightarrow f(a)$, so gilt wegen der Stetigkeit von f^{-1} in $b = f(a)$

$$\underbrace{f^{-1}(f(x))}_{=x} \longrightarrow \underbrace{f^{-1}(f(a))}_{=a}, \text{ also } x \rightarrow a.$$

Es gilt auch umgekehrt: Wenn $x \rightarrow a$, so $y = f(x) \rightarrow f(a) = b$.

Also $y \rightarrow b \iff x \rightarrow a$. Folglich existiert

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = (f^{-1})'(b),$$

und es ist

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}. \quad \square$$