

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient*)

7/1/3

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) differenzierbar

$\overline{\text{Def}}$ f ist in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es existiert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in a .

Bez. $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

Satz 7.6 (*Ableitung der Umkehrfunktion*)

7/1/25

Ist f in einer Umgebung $U(a)$ von a stetig und streng monoton, und ist f in a differenzierbar und $f'(a) \neq 0$, dann ist f^{-1} in $b := f(a)$ differenzierbar, und es ist $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Beispiele.

3. $f(x) = \ln x$.

7/1/27/3

$\ln x$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis e . Folglich gilt

$$y = \ln x := g^{-1}(x) \iff x = e^y := g(y)$$

und damit

$$f'(x) = (\ln x)' = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$