

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Beispiele.

1. Es sei $g(x)$ differenzierbar und $f(x) = c \cdot g(x)$. 7/1/27/1

Dann ist auch $c \cdot g(x)$ differenzierbar und $(c \cdot g(x))' = \underbrace{c'}_{=0} \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x)$.

2. $f(x) = \cos x$. Dann gilt 7/1/27/2

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(g(x)), \quad \text{für } g(x) := x + \frac{\pi}{2} \implies \\ f'(x) &= (\cos x)' = \sin'(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x)}_{=1} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x. \end{aligned}$$

3. $f(x) = \ln x$. 7/1/27/3

$\ln x$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis e . Folglich gilt

$$y = \ln x := g^{-1}(x) \iff x = e^y := g(y)$$

und damit

$$f'(x) = (\ln x)' = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

4. $f(x) = x^x$. 7/1/27/4

Es ist $f(x) = x^x = e^{x \cdot \ln x} \implies$

$$f'(x) = (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \cdot \ln x)' = x^x (\ln x + 1).$$