

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 6.20 Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a)$ und von $D_l(f, a)$. Dann gilt: 6/3/52
 f besitzt in a einen Grenzwert (der Größe c) \iff
 f besitzt in a einen rechtsseitigen Grenzwert ($:= c_r$) und einen linksseitigen Grenzwert ($:= c_l$) und beide Werte sind gleich ($c_r = c_l = c$).

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Definition. (Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient) 7/1/3

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) differenzierbar

$\overline{\text{Def}}$ f ist in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es existiert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in a .

Bez. $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

Beispiele.

4. Es sei $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{für } x \geq 0 \\ |x|, & \text{für } x < 0. \end{cases}$

7/1/8/4

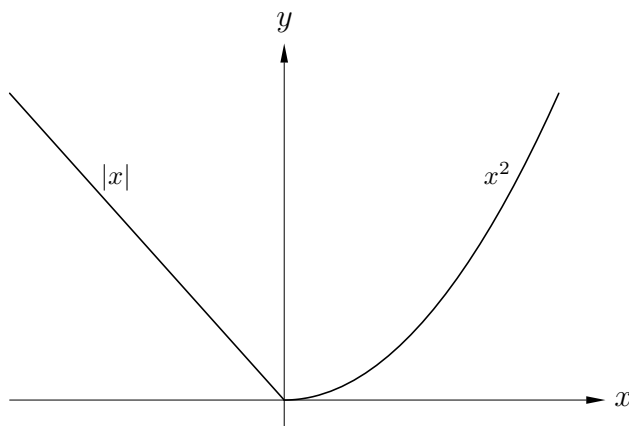


Abb. 7.4 Die Funktion hat an der Stelle $x = 0$ eine sog. Ecke, sie ist dort nicht differenzierbar.

Behauptung: f ist in $a = 0$ nicht differenzierbar.

Angenommen, es existiert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x},$$

dann liefert $\left(\frac{f(x_n)}{x_n}\right)$ für jede Nullfolge (x_n) mit $x_n \neq 0$ den gleichen Grenzwert.

(a) Es gelte zunächst $x_n > 0$ und $x_n \rightarrow 0$.

Dann ist $f(x_n) = x_n^2$ und damit $\frac{f(x_n)}{x_n} = x_n \rightarrow 0$.

(b) Es gelte jetzt $x_n < 0$ und $x_n \rightarrow 0$.

Dann ist $f(x_n) = |x_n|$ und damit $\frac{f(x_n)}{x_n} = \frac{|x_n|}{x_n} = -1$. $\nexists!$

Offenbar existieren rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten, aber beide sind verschieden.