

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Der Begriff der *Ableitung* (oder des *Differentialquotienten*) ist aus geometrisch-physikalischen Fragestellungen entstanden, insbesondere aus dem Tangentenproblem und dem Geschwindigkeitsproblem. 7/1/0

Tangentenproblem

Gegeben ist eine ebene Kurve und ein Punkt auf dieser Kurve.

Gesucht ist die Gleichung der Tangente (falls existent) an der Kurve in diesem Punkt (vgl. Abb. 7.1).

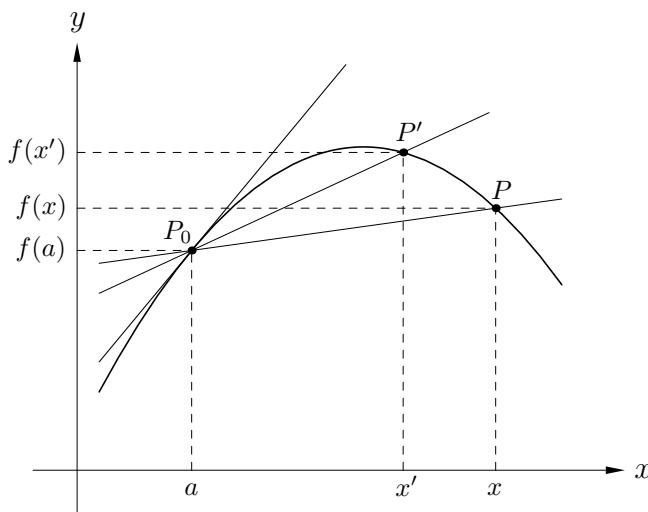


Abb. 7.1 Die Abbildung zeigt, wie sich der Anstieg der Sekante durch die Punkte $P_0 = (a, f(a))$ und $P = (x, f(x))$ für $x \rightarrow a$ verändert.

Im Grenzfalle erhält man die Tangente an der Kurve im Punkt P_0 .

Im einfachsten Fall sei die Kurve mit Hilfe der Funktion $y = f(x)$ gegeben. Dann ist der Anstieg der Sekante durch die Punkte P_0, P als Quotient

$$\frac{y - b}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

definiert.

Wenn $P \rightarrow P_0$ (d.h. $x \rightarrow a$), dann „dreht“ sich die Sekante und nimmt „im Grenzfalle“ die Lage der „Tangente“ ein (falls die Eigenschaften der Funktion „hinreichend gutartig“ sind).

Geschwindigkeitsproblem

Ein Massepunkt bewege sich (mit variabler Geschwindigkeit) entlang einer gegebenen Bahn. Gesucht ist die „Augenblicksgeschwindigkeit“ des Punktes zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 .

Die Durchschnittsgeschwindigkeit v zwischen zwei Bahnpunkten berechnet sich als Quotient der zurückgelegten Strecke s und der dazu benötigten Zeit t :

$$v = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

wobei Δs die zurückgelegte Strecke und Δt die gemessene Zeitdifferenz bedeuten.

Durch Verkleinerung der Meßstrecke nähert man sich der sog. Augenblicksgeschwindigkeit an, die für $t \rightarrow t_0$ entsteht.

Mathematisch gesehen ergibt sich in beiden Fällen das gleiche Problem, nämlich den Grenzwert eines bestimmten Quotienten auszuwerten. Die Mathematik abstrahierte von den konkreten Problemen und entwickelte hierzu eine leistungsfähige Theorie, die *Differentialrechnung*.

Wir betrachten in diesem Abschnitt nur Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition. (*Differenzenquotient*)

7/1/1

Sei f in einer Umgebung $U(a)$ definiert.

Die Funktion $\varphi(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ mit $x \in U(a)$ und $x \neq a$ heißt *Differenzenquotient* von f in a .

Bez. Für $y = f(x)$ und $b = f(a)$ sei
 $\Delta y := f(x) - f(a) = y - b$ und $\Delta x := x - a := h$.

Dann ist

7/1/2

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{y - b}{x - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} := \psi(h).$$

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient*)

7/1/3

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *differenzierbar*

$\overline{\text{Df}}$ f ist in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es existiert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in a .

Bez. $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ und f differenzierbar in jedem Punkt $a \in M$.

7/1/4

f' ist die 1. Ableitung von f in M

$\overline{\text{Df}}$ f' ist eine in M definierte Funktion, und für jedes $a \in M$ ist $f'(a)$ die

1. Ableitung von f an der Stelle a ,
 (d.h., für jedes $a \in M$ ist $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$).

Definition. (*rechtsseitige bzw. linksseitige Differenzierbarkeit*)

7/1/5

f ist in a *rechtsseitig* bzw. *linksseitig* differenzierbar

$\overline{\text{Df}}$ Es gibt eine Umgebung $U(a)$, so daß f in $U(a) \cap \{x : x \geq a\}$ bzw. in $U(a) \cap \{x : x \leq a\}$ definiert ist, und es existiert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \geq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \leq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Die Limites heißen (falls sie existieren) *rechtsseitige* bzw. *linksseitige Ableitung* der Funktion f .

7/1/6

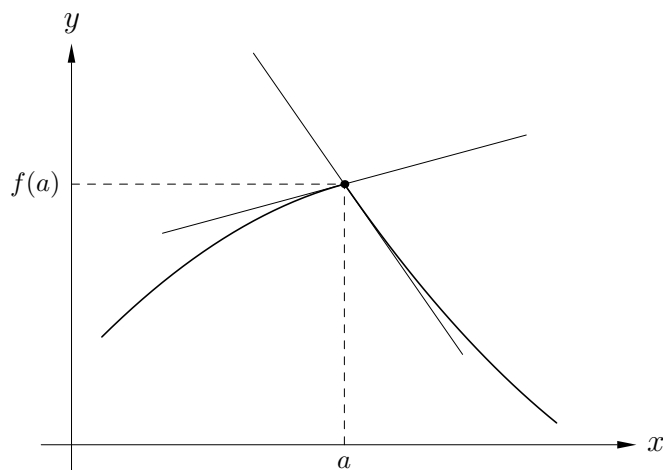


Abb. 7.2 Die dargestellte Funktion besitzt an der Stelle a eine linksseitige und eine rechtsseitige Ableitung. Da diese beiden Ableitungen jedoch voneinander verschieden sind, ist die Funktion in a nicht differenzierbar.

Bemerkung. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Wenn an der durch f gegebenen Kurve eine *Tangente* im Punkt $(a, f(a))$ existiert (dies wird der Fall sein, wenn f in a differenzierbar ist), dann ist der Anstieg der Tangente an der Stelle a durch $f'(a)$ gegeben.

Wir wollen jetzt die Gleichung der Tangente bestimmen. Zunächst gehen wir von der Geradengleichung $y := t(x) = c \cdot x + d$ aus und berechnen c und d .

Der Anstieg der Tangente ist durch $c = f'(a)$ gegeben. Die Tangente soll durch den Punkt $(a, f(a))$ verlaufen. Folglich ist

$$\begin{aligned} t(a) &= f'(a) \cdot a + d = f(a) \implies \\ d &= f(a) - f'(a) \cdot a \implies \\ t(x) &= f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a = f(a) + f'(a)(x - a). \end{aligned}$$

Definition. (*Tangente*)

7/1/7

Es sei f in a differenzierbar.

Die durch die Gleichung $t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ bestimmte Gerade heißt *Tangente* von f an der Stelle a (oder im Punkt $(a, f(a))$), und die entsprechende Gleichung heißt auch *Gleichung der Tangente*. (vgl. Abb. 7.1)

Beispiele.

1. $f(x) = c$.

7/1/8/1

Man überlegt sich leicht, daß f für jedes $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(a) = 0$ ist.

2. $f(x) = x$.

7/1/8/2

Der Differenzenquotient an einer beliebigen Stelle $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1.$$

Folglich ist $f'(a) = 1$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.

3. $f(x) = x^2$.

7/1/8/3

Behauptung: $f'(x) = 2x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x \neq a$. Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a \xrightarrow{x \rightarrow a} 2a.$$

Folglich ist

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 2a.$$

Die Gleichung der Tangente berechnet sich wie folgt:

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = a^2 + 2a(x - a) = 2ax - a^2.$$

Speziell für $a = 1$ ergibt sich dann

$$y = t(x) = 2x - 1 \quad (\text{vgl. Abb. 7.3})$$

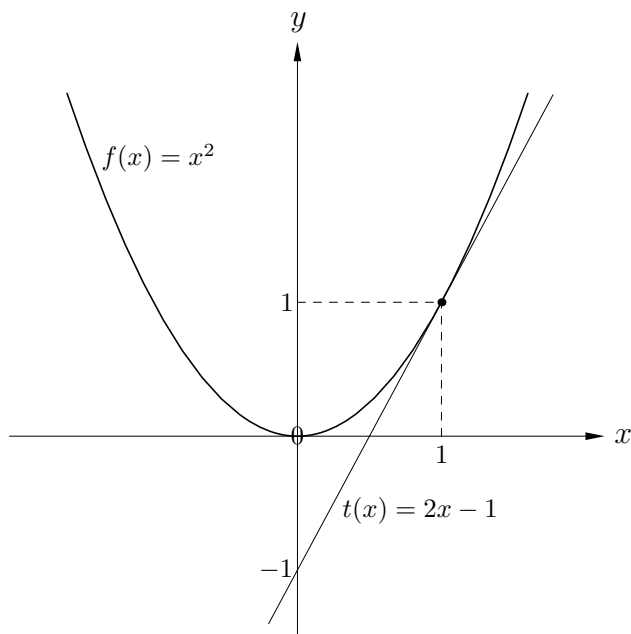


Abb. 7.3 Die Tangente an der Funktion $f(x) = x^2$ im Punkt $(1,1)$ hat den Anstieg 2; sie schneidet die y -Achse im Punkt $(0, -1)$.

4. Es sei $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{für } x \geq 0 \\ |x|, & \text{für } x < 0. \end{cases}$

7/1/8/4

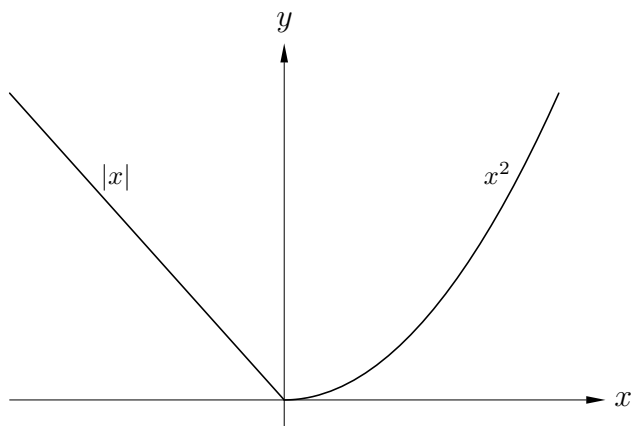


Abb. 7.4 Die Funktion hat an der Stelle $x = 0$ eine sog. Ecke, sie ist dort nicht differenzierbar.

Behauptung: f ist in $a = 0$ nicht differenzierbar.

Angenommen, es existiert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x},$$

dann liefert $\left(\frac{f(x_n)}{x_n}\right)$ für jede Nullfolge (x_n) mit $x_n \neq 0$ den gleichen Grenzwert.

(a) Es gelte zunächst $x_n > 0$ und $x_n \rightarrow 0$.

Dann ist $f(x_n) = x_n^2$ und damit $\frac{f(x_n)}{x_n} = x_n \rightarrow 0$.

(b) Es gelte jetzt $x_n < 0$ und $x_n \rightarrow 0$.

Dann ist $f(x_n) = |x_n|$ und damit $\frac{f(x_n)}{x_n} = \frac{|x_n|}{x_n} = -1$. $\nexists!$

Offenbar existieren rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten, aber beide sind verschieden.

5. Es sei $f(x) = e^x$.

7/1/8/5

Behauptung: $f'(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x \neq a$. Dann ist

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \cdot \frac{e^h - 1}{h}, \quad \text{für } h := x - a.$$

g.z.z.: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$

Es ist

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}.$$

Diese Reihe ist für alle $h \in \mathbb{R}$ absolut konvergent. Nach dem Lemma zum Identitätssatz für Potenzreihen (Kapitel 4, 4/5/7/2) sind Potenzreihen in ihrem Mittelpunkt stetig. Der Mittelpunkt ist hier 0, folglich gilt für jede Folge $h_\nu \rightarrow 0$

$$g(h_\nu) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_\nu^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_\nu^n}{(n+1)!} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 1,$$

Also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

6. Es sei $f(x) = \sin x$.

7/1/8/6

Behauptung: $f'(x) = \cos x$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x \neq a$. Dann ist

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = 2 \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} =$$

$$\cos \frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos \frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin h}{h} \quad \text{für } h := \frac{x-a}{2}.$$

Für $x \rightarrow a$ gilt $h \rightarrow 0$ und umgekehrt.

\cos ist stetig, folglich ist $\lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = \cos \frac{a+a}{2} = \cos a$.

g.z.z.: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.

Es ist

$$\frac{\sin h}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Analog wie im 5. Beispiel ist diese Potenzreihe ebenfalls in ihrem Mittelpunkt 0 stetig. Folglich ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{h^{2n}}{(2n+1)!} = 1.$$

Also

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a = \sin' a.$$

Bemerkung. Bei der Definition der Differenzierbarkeit sind wir vom Differenzenquotienten ausgegangen und haben dessen Limes gebildet. Dieses Herangehen funktioniert in \mathbb{R} recht gut, es läßt sich so aber nicht auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen, da z.B. in \mathbb{R}^n eine solche Division nicht erklärt ist. Daher werden wir jetzt eine gleichwertige Definition der Differenzierbarkeit aufstellen, die sich auch auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen läßt. Hierbei wird gleichzeitig das „Wesen der Differenzierbarkeit“ herausgearbeitet.

7/1/9

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Ist f in a differenzierbar, dann existiert bekanntlich der Grenzwert:

$$b := f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

folglich gibt es eine Funktion $r(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $r(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ und

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b + r(x) \implies$$

$$f(x) = f(a) + b \cdot (x - a) + r(x) \cdot (x - a).$$

Damit haben wir folgende Information:

Ist f in a differenzierbar, dann gibt es eine reelle Zahl b und eine Funktion r mit $r(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, so daß sich die Funktion f in einer Umgebung von a darstellen läßt in der Form:

$$f(x) = f(a) + b(x - a) + r(x)(x - a).$$

Offenbar ist $o(x) := r(x)(x - a)$ ebenfalls eine Funktion, so daß

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o(x)}{|x - a|} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)(x - a)}{|x - a|} = \lim_{x \rightarrow a} r(x) = 0.$$

(In diesem Zusammenhang sagen wir auch, daß $o(x)$ mit $x \rightarrow a$ von höherer als erster Ordnung gegen null strebt.)

Umgekehrt gelte nun folgendes:

Die Funktion f sei in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es gebe eine Konstante b und eine Funktion $o(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in U(a)$ gilt:

$$f(x) = f(a) + b(x - a) + o(x), \text{ wobei } \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(x)}{|x - a|} = 0.$$

Für $x \neq a$ gilt dann

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b + r^*(x), \text{ wobei } r^*(x) := \frac{o(x)}{x - a}.$$

Offenbar ist

$$\lim_{x \rightarrow a} r^*(x) = 0.$$

Folglich existiert

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b,$$

d.h., f ist an der Stelle a differenzierbar und $f'(a) = b$. Hieraus ergibt sich sofort, daß das nach Voraussetzung existierende b schon eindeutig bestimmt ist.

Definition. (eine weitere Definition der Differenzierbarkeit)

7/1/10

f ist in a differenzierbar

$\overline{\text{Df}}$ f ist in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es gibt eine reelle Zahl b und eine Funktion $o(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{o(x)}{|x - a|} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, so daß für jedes $x \in U(a)$ gilt: $f(x) = f(a) + b(x - a) + o(x)$.

Bemerkung. Das Wesen dieser Definition besteht darin, daß wir die Funktion f als lineare Funktion $t(x) = f(a) + b(x - a)$ plus einem Rest $o(x)$ dargestellt haben, wobei der Rest für „kleine“ $x - a$ selbst „klein“ wird, dies bedeutet eben $\lim_{x \rightarrow a} \frac{o(x)}{|x - a|} = 0$.

7/1/11

Hierfür sagen wir auch:

Die Funktion f läßt sich in $U(a)$ linear approximieren.

Differenzierbarkeit einer Funktion f in a bedeutet also nichts anderes, als f in einer Umgebung $U(a)$ durch eine lineare Funktion hinreichend gut approximieren zu können. Das ist das Wesen der Differenzierbarkeit, und dies läßt sich auch auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen. Davon werden wir im nächsten Kapitel noch Gebrauch machen. (vgl. auch Abb. 7.5)

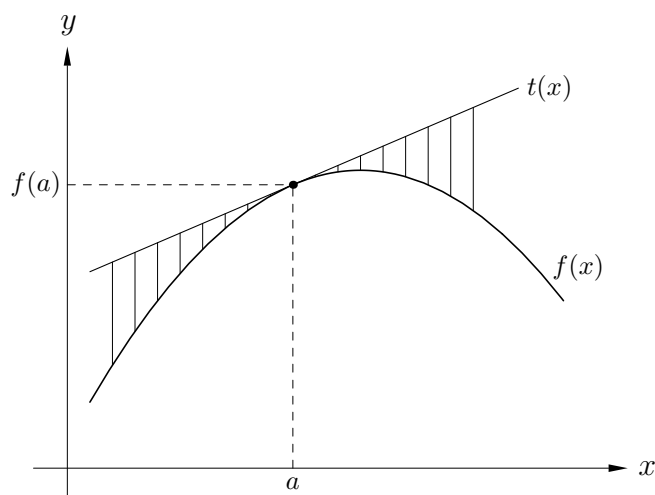


Abb. 7.5 Die Funktion wird in einer hinreichend kleinen Umgebung von a durch die Tangente linear approximiert. Der dabei auftretende Fehler ist durch die dünnen senkrechten Striche symbolisiert.

Satz 7.1 Ist f in a differenzierbar, dann ist f in a stetig.

7/1/12

Beweis. g.z.z.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

7/1/13

Für $x \neq a$ ist $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$.

Nach Voraussetzung ist $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$, folglich gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Damit erhält man

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad \square$$

Bemerkung. Aus der Differenzierbarkeit folgt also die Stetigkeit; die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung stetig ist, heißt *stetig differenzierbar*.

7/1/14

Satz 7.2 (Summenregel)

7/1/15

Sind f, g in a differenzierbar, dann ist $f + g$ in a differenzierbar, und es ist $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ (oder kurz $(f + g)' = f' + g'$).

Beweis. Es ist

7/1/16

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a) + g'(a) \quad \square$$

Satz 7.3 (*Produktregel*)

7/1/17

Sind f, g in a differenzierbar, dann ist $f \cdot g$ in a differenzierbar, und es ist $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ (oder kurz $(f \cdot g)' = f'g + fg'$).

Beweis. Es ist

7/1/18

$$\begin{aligned}
 \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} = \\
 &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(a) + f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} = \\
 &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(a)}{x - a} + \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} = \\
 &= \underbrace{f(x)}_{\substack{\longrightarrow f(a), \\ \text{stetig}}} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{\substack{\longrightarrow g'(a), \\ \text{differenzierbar}}} + g(a) \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\substack{\longrightarrow f'(a), \\ \text{differenzierbar}}} \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot f'(a). \quad \square
 \end{aligned}$$

Satz 7.4 Ist f in a differenzierbar und $f(a) \neq 0$, dann ist $\frac{1}{f}$ in a differenzierbar, 7/1/19

und es ist $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$.

Beweis. Es ist

7/1/20

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{1}{f}(x) - \frac{1}{f}(a)}{x - a} &= \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x - a} = \frac{\frac{f(a) - f(x)}{f(x) \cdot f(a)}}{x - a} = \\
 &= -\underbrace{\frac{1}{f(x) \cdot f(a)}}_{\longrightarrow \frac{1}{f^2(a)}} \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\longrightarrow f'(a)} \xrightarrow{x \rightarrow a} -\frac{f'(a)}{f^2(a)}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Korollar. (*Quotientenregel*)

7/1/21

Sind f, g in a differenzierbar und ist $g(a) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar,

und es ist $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$ (oder kurz $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$).

Beweis. (mit Hilfe von Satz 7.4 und der Produktregel)

7/1/22

Es ist $\frac{f}{g}(x) = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, folglich gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \left(\frac{1}{g(a)}\right) + f(a) \cdot \left(-\frac{g'(a)}{g^2(a)}\right) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}. \quad \square$$

Satz 7.5 (Kettenregel)

7/1/23

Ist g in a und f in $g(a)$ differenzierbar, dann ist $f \circ g$ in a differenzierbar, und es ist $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$ („äußere Ableitung mal innere Ableitung“).

Beweis. Es sei $b = g(a)$, dann ist f nach Voraussetzung in b differenzierbar. Folglich existiert $\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b)$, und für $y - b := k$ ist $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(b+k) - f(b)}{k} = f'(b)$.

7/1/24

Wir definieren jetzt eine für den Beweis nützliche Hilfsfunktion:

$$\psi(k) = \begin{cases} \frac{f(b+k) - f(b)}{k} - f'(b), & \text{für } k \neq 0, \\ 0, & \text{für } k = 0. \end{cases}$$

Dann ist ψ in $k = 0$ stetig, denn $\lim_{k \rightarrow 0} \psi(k) = 0 = \psi(0)$.

Damit gilt für alle k in einer Umgebung $U(0)$:

$$f(b+k) - f(b) = k \cdot f'(b) + k \cdot \psi(k). \quad (\star)$$

Weiterhin sei $x := a + h$ und $\varphi(h) := g(a+h) - g(a)$. Dann ist $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0 = \varphi(0)$, und damit ist φ in 0 stetig. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} &= \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \\ &= \frac{f(\varphi(h) + g(a)) - f(g(a))}{h} := (\star\star) \end{aligned}$$

Ersetzt man in (\star) k durch $\varphi(h)$, dann erhält man

$$\begin{aligned} (\star\star) &= \frac{f(b+k) - f(b)}{h} = \frac{k \cdot f'(b) + k \cdot \psi(k)}{h} = \\ &= \frac{\varphi(h)}{h} \cdot f'(b) + \frac{\varphi(h)}{h} \cdot \psi(\varphi(h)). \end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{\varphi(h)}{h} = \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(a),$$

denn g ist in a differenzierbar. Weiterhin sind ψ und φ in 0 stetig, folglich gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \psi(\varphi(h)) = \psi(\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h)) = \underbrace{\psi(\varphi(0))}_{=0} = \psi(0) = 0.$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{\varphi(h)}{h}}_{\rightarrow g'(a)} \cdot f'(b) + \frac{\varphi(h)}{h} \cdot \underbrace{\psi(\varphi(h))}_{\rightarrow 0} \right) &= \\ f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a). &\quad \square \end{aligned}$$

Satz 7.6 (Ableitung der Umkehrfunktion)

7/1/25

Ist f in einer Umgebung $U(a)$ von a stetig und streng monoton, und ist f in a differenzierbar und $f'(a) \neq 0$, dann ist f^{-1} in $b := f(a)$ differenzierbar, und es ist $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Beweis. Nach Satz 5.8 ist f^{-1} in einer Umgebung von $b = f(a)$ stetig. Für $x \in U(a)$ ist $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$; insbesondere ist $a = f^{-1}(b)$. Dann gilt

7/1/26

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}.$$

Wenn $y \rightarrow b$, also $f(x) \rightarrow f(a)$, so gilt wegen der Stetigkeit von f^{-1} in $b = f(a)$

$$\underbrace{f^{-1}(f(x))}_{=x} \longrightarrow \underbrace{f^{-1}(f(a))}_{=a}, \quad \text{also } x \rightarrow a.$$

Es gilt auch umgekehrt: Wenn $x \rightarrow a$, so $y = f(x) \rightarrow f(a) = b$.

Also $y \rightarrow b \iff x \rightarrow a$. Folglich existiert

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = (f^{-1})'(b),$$

und es ist

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}. \quad \square$$

Beispiele.

1. Es sei $g(x)$ differenzierbar und $f(x) = c \cdot g(x)$.

7/1/27/1

Dann ist auch $c \cdot g(x)$ differenzierbar und $(c \cdot g(x))' = \underbrace{c'}_{=0} \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x)$.

2. $f(x) = \cos x$. Dann gilt

7/1/27/2

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(g(x)), \quad \text{für } g(x) := x + \frac{\pi}{2} \implies \\ f'(x) &= (\cos x)' = \sin'(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x)}_{=1} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x. \end{aligned}$$

3. $f(x) = \ln x$.

7/1/27/3

$\ln x$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis e . Folglich gilt

$$y = \ln x := g^{-1}(x) \iff x = e^y := g(y)$$

und damit

$$f'(x) = (\ln x)' = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

4. $f(x) = x^x$.

7/1/27/4

Es ist $f(x) = x^x = e^{x \cdot \ln x} \implies$

$$f'(x) = (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \cdot \ln x)' = x^x (\ln x + 1).$$

Definition. (höhere Ableitungen)

7/1/28

Sei f in $U(a)$ differenzierbar und f' die 1. Ableitung von f in $U(a)$.

f ist in a zweimal differenzierbar

$\overline{\text{Df}}$ f' ist in a differenzierbar;

$f''(a) := (f')'(a)$ heißt 2. Ableitung von f in a .

Induktiv definiert man n -mal differenzierbar und die n -te Ableitung von f in a .

$$\text{Bez. } f^{(n)}(a) = \frac{d^n f}{dx^n}(a); \quad f^{(0)}(a) := f(a).$$

Satz 7.7 Sind f und g in a n -mal differenzierbar, dann sind $f \pm g$ und $f \cdot g$ in a n -mal differenzierbar, und es ist $(f \pm g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \pm g^{(n)}(a)$ und

7/1/29

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)}(a) \cdot g^{(n-i)}(a).$$

Beweis. Übungsaufgabe! (Man führt den Beweis leicht induktiv über n). \square

7/1/30