

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Satz 6.15** (Satz von Weierstraß)

6/3/21

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $M \neq \emptyset$ . Dann gilt:

Ist  $f$  in  $M$  stetig und  $M$  beschränkt und abgeschlossen, dann existieren Minimum und Maximum von  $f$  in  $M$  (d.h., es gibt Elemente  $\bar{a}, \bar{b} \in M$ , so daß  $f(\bar{a}) = \min f(M)$  und  $f(\bar{b}) = \max f(M)$ ).

**Satz 6.20** Sei  $a$  ein Häufungspunkt von  $D_r(f, a)$  und von  $D_l(f, a)$ . Dann gilt:

6/3/52

$f$  besitzt in  $a$  einen Grenzwert (der Größe  $c$ )  $\iff$

$f$  besitzt in  $a$  einen rechtsseitigen Grenzwert ( $:= c_r$ ) und einen linksseitigen Grenzwert ( $:= c_l$ ) und beide Werte sind gleich ( $c_r = c_l = c$ ).

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.1 Ableitung

**Definition.** (Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient)

7/1/3

$f$  ist an der Stelle  $a$  (oder kurz in  $a$ ) differenzierbar

$\iff$   $f$  ist in einer Umgebung  $U(a)$  definiert, und es existiert  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von  $f$  in  $a$ .

**Bez.**  $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$ .

**Beispiele.**

1.  $f(x) = c$ .

7/1/8/1

Man überlegt sich leicht, daß  $f$  für jedes  $a \in \mathbb{R}$  differenzierbar und  $f'(a) = 0$  ist.

#### 7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

**Satz 7.8** (Satz von Rolle)

7/2/0

Ist  $a < b$  und  $f$  in  $[a, b]$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar und ist  $f(a) = f(b)$ , dann existiert ein  $c \in (a, b)$ , so daß  $f'(c) = 0$ .

Beweis.

7/2/1

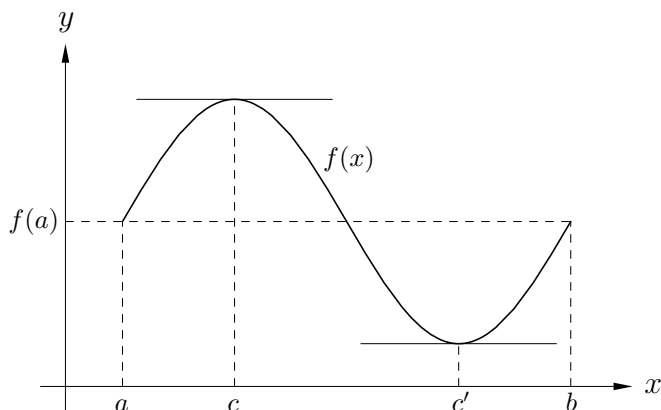


Abb. 7.6 An den Stellen  $c$  und  $c'$  besitzt die Funktion jeweils eine waagerechte Tangente.

Fall 1.  $f$  ist konstant. Dann ist  $f'(c) = 0$  sogar für jedes  $c \in (a, b)$ .

Fall 2.  $f$  ist nicht konstant.

Da  $f$  in  $[a, b]$  stetig ist, besitzt  $f$  dort ein Maximum und ein Minimum. Wenigstens eins von beiden wird im Inneren des Intervalls angenommen, da sonst  $f$  konstant ist. Es werde o.B.d.A. das Minimum an einer Stelle  $c \in (a, b)$  angenommen, d.h.,  $f(x) \geq f(c)$  für jedes  $x \in [a, b]$ .

Behauptung:  $f'(c) = 0$ .

Nach Voraussetzung existiert

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c),$$

folglich existieren auch rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten und beide sind gleich  $f'(c)$ .

Für  $x > c$ , also  $x - c > 0$ , ist  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$  und somit

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \geq 0.$$

Es sei nun  $x < c$ . Folglich ist  $x - c < 0$ , also  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$  und damit

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \leq 0.$$

Insgesamt erhält man

$$0 \leq f'(c) \leq 0 \implies f'(c) = 0. \quad \square$$