

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.1 Ableitung

**Definition.** (höhere Ableitungen)

7/1/28

Sei  $f$  in  $U(a)$  differenzierbar und  $f'$  die 1. Ableitung von  $f$  in  $U(a)$ .

$f$  ist in  $a$  zweimal differenzierbar

$\overline{\text{Def}}$   $f'$  ist in  $a$  differenzierbar;

$f''(a) := (f')'(a)$  heißt 2. Ableitung von  $f$  in  $a$ .

Induktiv definiert man  $n$ -mal differenzierbar und die  $n$ -te Ableitung von  $f$  in  $a$ .

$$\text{Bez. } f^{(n)}(a) = \frac{d^n f}{dx^n}(a); \quad f^{(0)}(a) := f(a).$$

#### 7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

**Satz 7.10** (2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

7/2/6

Ist  $a < b$  und sind  $f$  und  $g$  in  $[a, b]$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar und ist  $g'(x) \neq 0$  für jedes  $x \in (a, b)$ , dann gibt es ein  $c \in (a, b)$ , so daß  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

(Das bedeutet, daß der Quotient des Anstiegs der Sekanten beider Funktionen in dem Intervall  $[a, b]$  gleich dem Quotienten des Anstiegs der Tangenten an einer geeigneten Zwischenstelle ist.)

**Satz 7.11** (Satz von Taylor)

7/2/9

Sei  $I$  ein Intervall und  $a \in I$ . Ist  $f$  in  $I$   $(n+1)$ -mal differenzierbar, dann gibt es für jedes  $x \in I$  ein  $\vartheta (= \vartheta(x))$  mit  $0 < \vartheta < 1$ , so daß

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n + R_n(x), \quad \text{wobei}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x - a))}{(n+1)!} \cdot (x - a)^{(n+1)}.$$

( $R_n(x)$  heißt Lagrange'sches Restglied,  $p(x) := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x - a)^i$  heißt Taylorpolynom, wobei

$f^{(0)}(x) := f(x)$ , und  $f(x) = p(x) + R_n(x)$  heißt Taylorsche Formel.)

**Beweis.** Wir betrachten die folgende Hilfsfunktion

7/2/10

$$\varphi(x) = f(x) - p(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n.$$

Offenbar ist  $\varphi$  in  $I$   $(n+1)$ -mal differenzierbar, denn  $f$  hat diese Eigenschaft, und  $p(x)$  ist ein Polynom.

Induktiv zeigt man leicht

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = \dots = \varphi^{(n)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

Der Anfangsschritt  $\varphi(a) = 0$  ist trivial.

$$\varphi'(x) = f'(x) - 0 - f'(a) - \frac{f''(a)}{2!} \cdot 2(x-a)^1 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot n(x-a)^{n-1} \implies$$

$$\varphi'(a) = 0 \quad \text{usw.}$$

Da Polynome  $n$ -ten Grades bei  $(n+1)$ -maliger Differentiation zu null werden, erhält man

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$\psi(x)$  sei eine weitere Hilfsfunktion mit

$$\psi(x) := (x-a)^{n+1} \implies$$

$$\psi(a) = \psi'(a) = \dots = \psi^{(n)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad \psi^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

für jedes  $x$  und

$$\psi^{(i)}(x) = (n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot (n-i+1) \cdot (x-a)^{n-i} \neq 0$$

falls  $x \neq a$  und  $i = 0, \dots, n$ .

Wir wenden den 2. Mittelwertsatz mehrmals an.

Für  $x \in I$ ,  $x \neq a$ , und o.B.d.A.  $a < x$  gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} &= \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} && (\text{denn } \varphi(a) = \psi(a) = 0) \\ &= \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} && \text{für ein } x_1 \in (a, x) \\ &= \frac{\varphi'(x_1) - \varphi'(a)}{\psi'(x_1) - \psi'(a)} && (\text{denn } \varphi'(a) = \psi'(a) = 0) \\ &= \frac{\varphi''(x_2)}{\psi''(x_2)} && \text{für ein } x_2 \in (a, x_1) \\ &\vdots \\ &= \frac{\varphi^{(n)}(x_n)}{\psi^{(n)}(x_n)} && \text{für ein } x_n \in (a, x_{n-1}) \\ &= \frac{\varphi^{(n)}(x_n) - \varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(x_n) - \psi^{(n)}(a)} && (\text{denn } \varphi^{(n)}(a) = \psi^{(n)}(a) = 0) \\ &= \frac{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(x_{n+1})} && \text{für ein } x_{n+1} \in (a, x_n). \end{aligned}$$

Hieraus erhält man insgesamt

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(x_{n+1})} \quad \text{und} \quad a < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 < x \quad \implies$$

es gibt ein  $\vartheta$  mit  $0 < \vartheta < 1$ , so daß  $x_{n+1} = a + \vartheta(x - a)$ .

Folglich ist

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(x_{n+1})} \cdot \psi(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x - a))}{(n + 1)!} \cdot (x - a)^{n+1} := R_n(x),$$

und nach Definition gilt

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n.$$

Hieraus erhält man sofort die Behauptung.  $\square$