

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

Definition. (*Reihe*)

4/0/1

Es sei $(a_n)_{n=0,1,2,\dots}$ eine Folge von reellen Zahlen.

Die Folge $(S_n)_{n=0,1,2,\dots}$ mit $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$ heißt *Folge der Partialsummen* von (a_n) oder *unendliche Reihe* (kurz *Reihe*).

$$\text{Bez.: } (S_n) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum a_i$$

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition. (*Konvergenz von Reihen*)

4/1/0

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert (gegen a) $\stackrel{\text{Df}}{=} (S_n)$ konvergiert (gegen a).

$$\text{Bez.: } \lim S_n = a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

a heißt dann *Wert* oder *Limes* der Reihe.

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Satz 7.11 (*Satz von Taylor*)

7/2/9

Sei I ein Intervall und $a \in I$. Ist f in I $(n+1)$ -mal differenzierbar, dann gibt es für jedes $x \in I$ ein $\vartheta (= \vartheta(x))$ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_n(x), \quad \text{wobei}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{(n+1)}.$$

($R_n(x)$ heißt *Lagrange'sches Restglied*, $p(x) := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$ heißt *Taylorpolynom*, wobei $f^{(0)}(x) := f(x)$, und $f(x) = p(x) + R_n(x)$ heißt *Taylor'sche Formel*.)

Korollar. Es sei I ein Intervall mit $a \in I$, f sei in I beliebig oft differenzierbar, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$, wobei $p_n(x)$ das Taylorpolynom und $R_n(x)$ das Lagrange'sche Restglied in der Taylor'schen Formel ist (siehe Satz 7.11).

7/2/12

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ für jedes $x \in I$, dann konvergiert die Folge $(p_n(x))$ der Partialsummen der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$ gegen $f(x)$.

(Unter den angegebenen Voraussetzungen läßt sich f in eine sog. *Taylorreihe* entwickeln, d.h.,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i.)$$

Beweis. Nach der Taylorschen Formel gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $x \in I$:

7/2/13

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) \quad \implies$$

$$f(x) - p_n(x) = R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Folglich gilt

$$p_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x),$$

und da $(p_n(x))$ die Folge der Partialsummen von $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$ ist, erhält man

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i. \quad \square$$