

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Korollar. Es sei I ein Intervall mit $a \in I$, f sei in I beliebig oft differenzierbar, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$, wobei $p_n(x)$ das Taylorpolynom und $R_n(x)$ das Lagrange'sche Restglied in der Taylorschen Formel ist (siehe Satz 7.11). 7/2/12

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ für jedes $x \in I$, dann konvergiert die Folge $(p_n(x))$ der Partialsummen der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$ gegen $f(x)$.

(Unter den angegebenen Voraussetzungen läßt sich f in eine sog. Taylorreihe entwickeln, d.h.,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i.)$$

Beispiele.

2. Es sei $f(x) = e^x$, $a = 0$, $\varrho > 0$ und $I = (-\varrho, \varrho)$. 7/2/15/2

Dann ist offenbar f in I für jedes $n \in \mathbb{N}$ $(n+1)$ -mal differenzierbar. Nach dem Satz von Taylor erhält man für $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot (x-0)^i + \frac{f^{(n+1)}(0 + \vartheta(x-0))}{(n+1)!} \cdot (x-0)^{n+1} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \end{aligned}$$

wobei $0 < \vartheta < 1$.

Folglich ist

$$R_n(x) = e^{\vartheta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$e^{\vartheta x}$ ist in I beschränkt, denn $|e^{\vartheta x}| \leq e^{\vartheta|x|} \leq e^{\vartheta\varrho} := c$.

Weiterhin ist $|x^{n+1}| = |x|^{n+1} \leq \varrho^{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, dann existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt:

$$\left| \frac{\varrho^{n+1}}{(n+1)!} \right| < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Folglich gilt

$$|R_n(x)| = \underbrace{|e^{\vartheta x}|}_{\leq c} \cdot \underbrace{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}_{\leq \frac{\varrho^{n+1}}{(n+1)!}} \leq c \cdot \underbrace{\frac{\varrho^{n+1}}{(n+1)!}}_{< \frac{\varepsilon}{c}} < \varepsilon$$

für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$.

Damit läßt sich die Exponentialfunktion e^x in einem gegebenen Intervall $(-\varrho, \varrho)$ (und somit auch in jedem Intervall $[a, b] \subseteq (-\varrho, \varrho)$) durch ein Polynom $p_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$ mit vorgegebener Genauigkeit ε approximieren. (Die komplizierteste Aufgabe bei derartigen Approximationen besteht meistens in der Abschätzung des Restgliedes.)

Insbesondere erhält man für $x = 1$

$$e = e^1 = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} + R_n(1) \quad \text{und} \quad |R_n(1)| < \varepsilon,$$

d.h., e kann mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden.

Nach dem Korollar gilt für die Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot x^i,$$

wodurch die Definition dieser Funktion als Reihe nachträglich gerechtfertigt ist.