

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Satz 7.9 (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

7/2/2

Ist $a < b$ und f in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar, dann gibt es ein $c \in (a, b)$, so daß $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Korollar. Ist I ein Intervall in \mathbb{R} , f in I differenzierbar, und ist $f'(x) = 0$ für jedes $x \in I$, dann ist f in I konstant. 7/2/4

Beweis. g.z.z.: Wenn $x_1, x_2 \in I$, so $f(x_1) = f(x_2)$.

7/2/5

Sei o.B.d.A. $x_1 < x_2$. Nach Voraussetzung ist f in I differenzierbar, folglich ist f auch in $[x_1, x_2]$ differenzierbar und stetig. Nach dem 1. Mittelwertsatz gibt es dann ein $c \in (x_1, x_2)$, so daß $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$.

Wegen $f'(c) = 0$ ist $f(x_2) - f(x_1) = 0$ und somit $f(x_1) = f(x_2)$. \square