

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Satz 7.8 (Satz von Rolle)

7/2/0

Ist $a < b$ und f in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar und ist $f(a) = f(b)$, dann existiert ein $c \in (a, b)$, so daß $f'(c) = 0$.

Beweis. (Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Satzes von Rolle.)

7/2/3

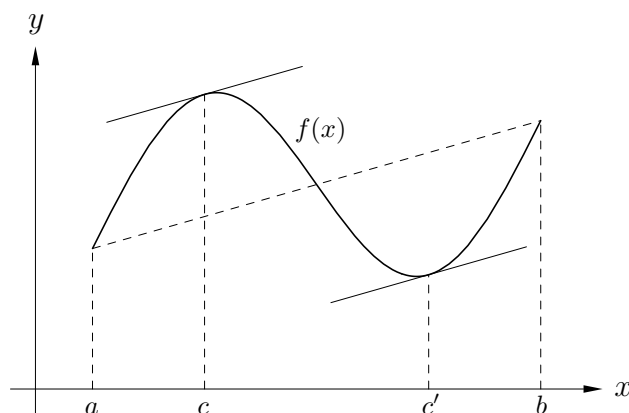


Abb. 7.7 An den Stellen c und c' besitzt die Funktion Tangenten, die parallel zur Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verlaufen.

Wir betrachten die folgende Hilfsfunktion, auf die wir den Satz von Rolle anwenden werden:

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

(Von f wird eine lineare Funktion subtrahiert, die den gleichen Anstieg besitzt, wie die Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.)

Offenbar ist g in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar, und es gilt

$$g(a) = f(a) = g(b).$$

Für die Funktion g existiert dann nach dem Satz von Rolle ein Element $c \in (a, b)$, so daß

$$g'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

Satz 7.10 (2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

7/2/6

Ist $a < b$ und sind f und g in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar und ist $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$, so daß $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

(Das bedeutet, daß der Quotient des Anstiegs der Sekanten beider Funktionen in dem Intervall $[a, b]$ gleich dem Quotienten des Anstiegs der Tangenten an einer geeigneten Zwischenstelle ist.)

Beweis. Es ist $g(b) \neq g(a)$; anderenfalls gäbe es nach dem Satz von Rolle ein $c \in (a, b)$, so daß $g'(c) = 0$ ~~!~~

7/2/7

Ähnlich wie im Beweis des 1. Mittelwertsatzes betrachten wir eine Hilfsfunktion

$$\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a)).$$

Offensichtlich ist φ in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar (denn f und g haben diese Eigenschaften), und es ist

$$\varphi(a) = f(a) \quad \text{und}$$

$$\varphi(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(b) - g(a)) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a).$$

Also $\varphi(a) = \varphi(b)$. Folglich läßt sich auf φ der Satz von Rolle anwenden; d.h., es gibt ein $c \in (a, b)$ mit $\varphi'(c) = 0$.

Wir bilden die Ableitung von φ an der Stelle c :

$$\varphi'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) \quad \implies$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad \square$$