

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.1 Ableitung

**Definition.** (höhere Ableitungen)

7/1/28

Sei  $f$  in  $U(a)$  differenzierbar und  $f'$  die 1. Ableitung von  $f$  in  $U(a)$ .

$f$  ist in  $a$  zweimal differenzierbar

$\overline{\text{Df}}$   $f'$  ist in  $a$  differenzierbar;

$f''(a) := (f')'(a)$  heißt 2. Ableitung von  $f$  in  $a$ .

Induktiv definiert man  $n$ -mal differenzierbar und die  $n$ -te Ableitung von  $f$  in  $a$ .

**Bez.**  $f^{(n)}(a) = \frac{d^n f}{dx^n}(a)$ ;  $f^{(0)}(a) := f(a)$ .

#### 7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

**Satz 7.11** (Satz von Taylor)

7/2/9

Sei  $I$  ein Intervall und  $a \in I$ . Ist  $f$  in  $I$   $(n+1)$ -mal differenzierbar, dann gibt es für jedes  $x \in I$  ein  $\vartheta (= \vartheta(x))$  mit  $0 < \vartheta < 1$ , so daß

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_n(x), \quad \text{wobei}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{(n+1)}.$$

( $R_n(x)$  heißt Lagrange'sches Restglied,  $p(x) := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$  heißt Taylorpolynom, wobei  $f^{(0)}(x) := f(x)$ , und  $f(x) = p(x) + R_n(x)$  heißt Taylorsche Formel.)