

# Kapitel 7

## Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

### 7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

#### Satz 7.8 (Satz von Rolle)

7/2/0

Ist  $a < b$  und  $f$  in  $[a, b]$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar und ist  $f(a) = f(b)$ , dann existiert ein  $c \in (a, b)$ , so daß  $f'(c) = 0$ .

#### Beweis.

7/2/1

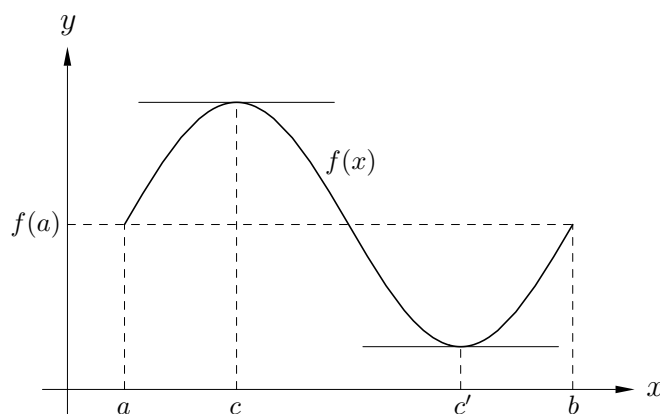


Abb. 7.6 An den Stellen  $c$  und  $c'$  besitzt die Funktion jeweils eine waagerechte Tangente.

Fall 1.  $f$  ist konstant. Dann ist  $f'(c) = 0$  sogar für jedes  $c \in (a, b)$ .

Fall 2.  $f$  ist nicht konstant.

Da  $f$  in  $[a, b]$  stetig ist, besitzt  $f$  dort ein Maximum und ein Minimum. Wenigstens eins von beiden wird im Inneren des Intervalls angenommen, da sonst  $f$  konstant ist. Es werde o.B.d.A. das Minimum an einer Stelle  $c \in (a, b)$  angenommen, d.h.,  $f(x) \geq f(c)$  für jedes  $x \in [a, b]$ .

Behauptung:  $f'(c) = 0$ .

Nach Voraussetzung existiert

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c),$$

folglich existieren auch rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten und beide sind gleich  $f'(c)$ .

Für  $x > c$ , also  $x - c > 0$ , ist  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$  und somit

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \geq 0.$$

Es sei nun  $x < c$ . Folglich ist  $x - c < 0$ , also  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$  und damit

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \leq 0.$$

Insgesamt erhält man

$$0 \leq f'(c) \leq 0 \implies f'(c) = 0. \quad \square$$

**Satz 7.9** (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

7/2/2

Ist  $a < b$  und  $f$  in  $[a, b]$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar, dann gibt es ein  $c \in (a, b)$ , so daß  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ .

**Beweis.** (Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Satzes von Rolle.)

7/2/3

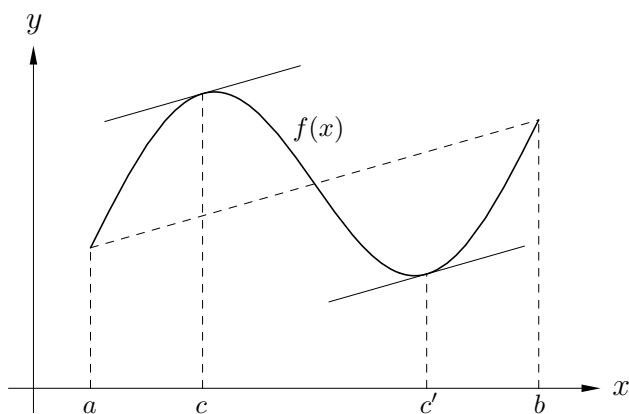


Abb. 7.7 An den Stellen  $c$  und  $c'$  besitzt die Funktion Tangenten, die parallel zur Sekante durch die Punkte  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$  verlaufen.

Wir betrachten die folgende Hilfsfunktion, auf die wir den Satz von Rolle anwenden werden:

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

(Von  $f$  wird eine lineare Funktion subtrahiert, die den gleichen Anstieg besitzt, wie die Sekante durch die Punkte  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$ .)

Offenbar ist  $g$  in  $[a, b]$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar, und es gilt

$$g(a) = f(a) = g(b).$$

Für die Funktion  $g$  existiert dann nach dem Satz von Rolle ein Element  $c \in (a, b)$ , so daß

$$\begin{aligned} g'(c) = 0 &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies \\ f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square \end{aligned}$$

**Korollar.** Ist  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$ ,  $f$  in  $I$  differenzierbar, und ist  $f'(x) = 0$  für jedes  $x \in I$ , dann ist  $f$  in  $I$  konstant. 7/2/4

**Beweis.** g.z.z.: Wenn  $x_1, x_2 \in I$ , so  $f(x_1) = f(x_2)$ . 7/2/5

Sei o.B.d.A.  $x_1 < x_2$ . Nach Voraussetzung ist  $f$  in  $I$  differenzierbar, folglich ist  $f$  auch in  $[x_1, x_2]$  differenzierbar und stetig. Nach dem 1. Mittelwertsatz gibt es dann ein  $c \in (x_1, x_2)$ , so daß  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$ .

Wegen  $f'(c) = 0$  ist  $f(x_2) - f(x_1) = 0$  und somit  $f(x_1) = f(x_2)$ . □

**Satz 7.10** (2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung) 7/2/6

Ist  $a < b$  und sind  $f$  und  $g$  in  $[a, b]$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar und ist  $g'(x) \neq 0$  für jedes  $x \in (a, b)$ , dann gibt es ein  $c \in (a, b)$ , so daß  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

(Das bedeutet, daß der Quotient des Anstiegs der Sekanten beider Funktionen in dem Intervall  $[a, b]$  gleich dem Quotienten des Anstiegs der Tangenten an einer geeigneten Zwischenstelle ist.)

**Beweis.** Es ist  $g(b) \neq g(a)$ ; anderenfalls gäbe es nach dem Satz von Rolle ein  $c \in (a, b)$ , so daß  $g'(c) = 0$  7/2/7

Ähnlich wie im Beweis des 1. Mittelwertsatzes betrachten wir eine Hilfsfunktion

$$\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a)).$$

Offensichtlich ist  $\varphi$  in  $[a, b]$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar (denn  $f$  und  $g$  haben diese Eigenschaften), und es ist

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= f(a) \quad \text{und} \\ \varphi(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(b) - g(a)) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a). \end{aligned}$$

Also  $\varphi(a) = \varphi(b)$ . Folglich läßt sich auf  $\varphi$  der Satz von Rolle anwenden; d.h., es gibt ein  $c \in (a, b)$  mit  $\varphi'(c) = 0$ .

Wir bilden die Ableitung von  $\varphi$  an der Stelle  $c$ :

$$\begin{aligned} \varphi'(c) = 0 &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) \implies \\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} &= \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad \square \end{aligned}$$

Als eine wichtige Anwendung dieses Satzes erhält man die sog. *Taylor'sche Formel*. 7/2/8

**Satz 7.11** (Satz von Taylor)

7/2/9

Sei  $I$  ein Intervall und  $a \in I$ . Ist  $f$  in  $I$   $(n+1)$ -mal differenzierbar, dann gibt es für jedes  $x \in I$  ein  $\vartheta (= \vartheta(x))$  mit  $0 < \vartheta < 1$ , so daß

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_n(x), \quad \text{wobei}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{(n+1)}.$$

( $R_n(x)$  heißt Lagrange'sches Restglied,  $p(x) := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$  heißt Taylorpolynom, wobei  $f^{(0)}(x) := f(x)$ , und  $f(x) = p(x) + R_n(x)$  heißt Taylorsche Formel.)

**Beweis.** Wir betrachten die folgende Hilfsfunktion

7/2/10

$$\varphi(x) = f(x) - p(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n.$$

Offenbar ist  $\varphi$  in  $I$   $(n+1)$ -mal differenzierbar, denn  $f$  hat diese Eigenschaft, und  $p(x)$  ist ein Polynom.

Induktiv zeigt man leicht

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = \dots = \varphi^{(n)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

Der Anfangsschritt  $\varphi(a) = 0$  ist trivial.

$$\varphi'(x) = f'(x) - 0 - f'(a) - \frac{f''(a)}{2!} \cdot 2(x-a)^1 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot n(x-a)^{n-1} \implies$$

$$\varphi'(a) = 0 \quad \text{usw.}$$

Da Polynome  $n$ -ten Grades bei  $(n+1)$ -maliger Differentiation zu null werden, erhält man

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

$\psi(x)$  sei eine weitere Hilfsfunktion mit

$$\psi(x) := (x-a)^{n+1} \implies$$

$$\psi(a) = \psi'(a) = \dots = \psi^{(n)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad \psi^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

für jedes  $x$  und

$$\psi^{(i)}(x) = (n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot (n-i+1) \cdot (x-a)^{n-i} \neq 0$$

falls  $x \neq a$  und  $i = 0, \dots, n$ .

Wir wenden den 2. Mittelwertsatz mehrmals an.

Für  $x \in I$ ,  $x \neq a$ , und o.B.d.A.  $a < x$  gilt dann

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} \quad (\text{denn } \varphi(a) = \psi(a) = 0)$$

$$= \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} \quad \text{für ein } x_1 \in (a, x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varphi'(x_1) - \varphi'(a)}{\psi'(x_1) - \psi'(a)} \quad (\text{denn } \varphi'(a) = \psi'(a) = 0) \\
&= \frac{\varphi''(x_2)}{\psi''(x_2)} \quad \text{für ein } x_2 \in (a, x_1) \\
&\vdots \\
&= \frac{\varphi^{(n)}(x_n)}{\psi^{(n)}(x_n)} \quad \text{für ein } x_n \in (a, x_{n-1}) \\
&= \frac{\varphi^{(n)}(x_n) - \varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(x_n) - \psi^{(n)}(a)} \quad (\text{denn } \varphi^{(n)}(a) = \psi^{(n)}(a) = 0) \\
&= \frac{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(x_{n+1})} \quad \text{für ein } x_{n+1} \in (a, x_n).
\end{aligned}$$

Hieraus erhält man insgesamt

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(x_{n+1})} \quad \text{und} \quad a < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x \quad \implies$$

es gibt ein  $\vartheta$  mit  $0 < \vartheta < 1$ , so daß  $x_{n+1} = a + \vartheta(x - a)$ .

Folglich ist

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(x_{n+1})} \cdot \psi(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x - a))}{(n+1)!} \cdot (x - a)^{n+1} := R_n(x),$$

und nach Definition gilt

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n.$$

Hieraus erhält man sofort die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung.** Für  $n = 0$  liefert der Taylor'sche Satz als Spezialfall den 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung. 7/2/11

**Korollar.** Es sei  $I$  ein Intervall mit  $a \in I$ ,  $f$  sei in  $I$  beliebig oft differenzierbar, und für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$ , wobei  $p_n(x)$  das Taylorpolynom und  $R_n(x)$  das Lagrange'sche Restglied in der Taylorschen Formel ist (siehe Satz 7.11). 7/2/12

Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  für jedes  $x \in I$ , dann konvergiert die Folge  $(p_n(x))$  der Partialsummen der Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x - a)^i$  gegen  $f(x)$ .

(Unter den angegebenen Voraussetzungen läßt sich  $f$  in eine sog. *Taylorreihe* entwickeln, d.h.,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i.$$

**Beweis.** Nach der Taylorschen Formel gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und für jedes  $x \in I$ : 7/2/13

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) \implies$$

$$f(x) - p_n(x) = R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Folglich gilt

$$p_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x),$$

und da  $(p_n(x))$  die Folge der Partialsummen von  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$  ist, erhält man

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i. \quad \square$$

**Bemerkung.**  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$  heißt *Taylorreihe* von  $f(x)$  in  $a$ . 7/2/14

Für  $a = 0$  heißt die Reihe auch *Mac Laurin'sche Reihe*.

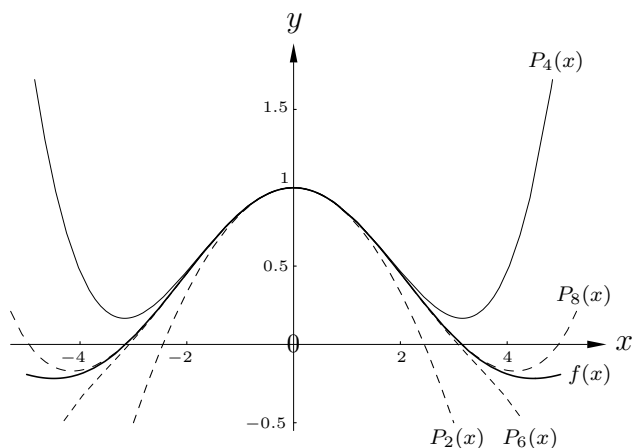


Abb. 7.8 Die Abbildung zeigt die Funktion  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  und ihre Taylorpolynome  $P_n(x)$  für  $n = 2, 4, 6, 8$ . Es ist deutlich zu erkennen, daß mit wachsendem  $n$  die Funktion  $f(x)$  durch  $P_n(x)$  immer besser angenähert wird. Es ist  $P_8(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!}$ . Man überlegt sich leicht, daß stets  $P_n(x) = P_{n-1}(x)$  ist.

Die Taylorreihe von  $f$  läßt sich (formal) schon immer dann bilden, wenn  $f$  in  $I$  beliebig oft differenzierbar ist. Aber nur wenn auch  $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  gilt, dann stellt die Taylorreihe die Funktion  $f$  dar.

Wir betrachten jetzt ein Beispiel, in dem  $f$  beliebig oft differenzierbar ist, aber

$$f(x) \neq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i.$$

## Beispiele.

1. Es sei  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$

7/2/15/1

Man kann leicht zeigen, daß  $f$  in einer Umgebung von 0 beliebig oft differenzierbar ist. (Induktiv beweist man, daß die  $n$ -te Ableitung für  $x \neq 0$  immer die Gestalt  $e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot r(x)$  hat, wobei  $r(x)$  eine rationale Funktion ist, und die  $(n+1)$ -te Ableitung für  $x = 0$  existiert und 0 ist.)

Folglich gilt stets  $f^{(n)}(0) = 0$ , und damit

$$\underbrace{f(x)}_{\neq 0} \neq \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(i)}(0)}{i!}}_{=0} \cdot (x-0)^i = 0.$$

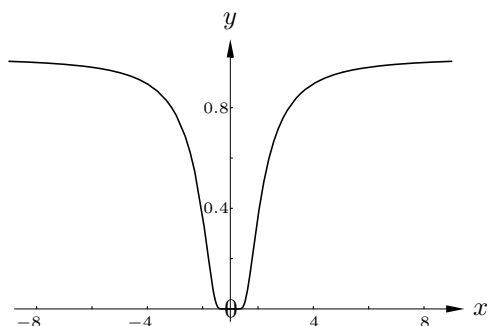


Abb. 7.9 a

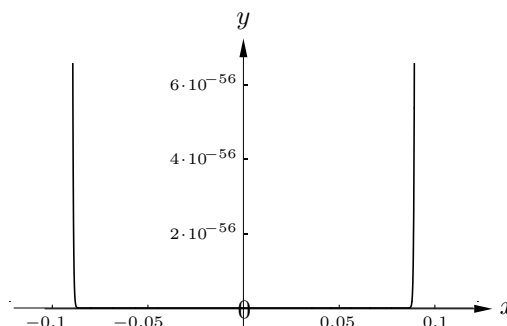


Abb. 7.9 b

Die Abbildung 7.9 a zeigt die Funktion  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ , für  $x \neq 0$ , und  $f(0) = 0$ . In einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 schmiegt sich diese Funktion der  $x$ -Achse so gut an, daß alle Ableitungen von  $f(x)$  in 0 stets null werden. Abb. 7.9 b zeigt die gleiche Funktion in einer solchen Umgebung.

2. Es sei  $f(x) = e^x$ ,  $a = 0$ ,  $\varrho > 0$  und  $I = (-\varrho, \varrho)$ .

7/2/15/2

Dann ist offenbar  $f$  in  $I$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $(n+1)$ -mal differenzierbar. Nach dem Satz von Taylor erhält man für  $x \in I$ :

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot (x-0)^i + \frac{f^{(n+1)}(0 + \vartheta(x-0))}{(n+1)!} \cdot (x-0)^{n+1} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \end{aligned}$$

wobei  $0 < \vartheta < 1$ .

Folglich ist

$$R_n(x) = e^{\vartheta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$e^{\vartheta x}$  ist in  $I$  beschränkt, denn  $|e^{\vartheta x}| \leq e^{\vartheta|x|} \leq e^{\vartheta \varrho} := c$ .

Weiterhin ist  $|x^{n+1}| = |x|^{n+1} \leq \varrho^{n+1}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , und es ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ .

Ist  $\varepsilon > 0$  gegeben, dann existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  gilt:

$$\left| \frac{\varrho^{n+1}}{(n+1)!} \right| < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Folglich gilt

$$|R_n(x)| = \underbrace{|e^{\vartheta x}|}_{\leq c} \cdot \underbrace{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}_{\leq \frac{\varrho^{n+1}}{(n+1)!}} \leq c \cdot \underbrace{\frac{\varrho^{n+1}}{(n+1)!}}_{< \frac{\varepsilon}{c}} < \varepsilon$$

für hinreichend große  $n \in \mathbb{N}$ .

Damit läßt sich die Exponentialfunktion  $e^x$  in einem gegebenen Intervall  $(-\varrho, \varrho)$  (und somit auch in jedem Intervall  $[a, b] \subseteq (-\varrho, \varrho)$ ) durch ein Polynom  $p_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$  mit vorgegebener Genauigkeit  $\varepsilon$  approximieren. (Die komplizierteste Aufgabe bei derartigen Approximationen besteht meistens in der Abschätzung des Restgliedes.)

Insbesondere erhält man für  $x = 1$

$$e = e^1 = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} + R_n(1) \quad \text{und} \quad |R_n(1)| < \varepsilon,$$

d.h.,  $e$  kann mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden.

Nach dem Korollar gilt für die Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot x^i,$$

wodurch die Definition dieser Funktion als Reihe nachträglich gerechtfertigt ist.