

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.1 Operationen für Funktionen

Definition. (*monoton, streng monoton*)

5/1/11

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \subseteq D(f)$.

- (1) f ist *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) in M
 $\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 \leq x_2$, so $f(x_1) \leq f(x_2)$
(bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$).
- (2) f ist *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) in M
 $\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x_1, x_2 \in M$ gilt: Wenn $x_1 < x_2$, so $f(x_1) < f(x_2)$
(bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).

Kapitel 7 Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient*)

7/1/3

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *differenzierbar*

$\overline{\text{Df}}$ f ist in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es existiert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in a .

$$\text{Bez. } f'(a) = \frac{df}{dx}(a).$$

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Definition. (*konvex*)

7/3/12

Sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar.

- (1) f ist in I *konvex* (bzw. *streng konvex*) *von unten*

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x, c \in I$ mit $x \neq c$ gilt:
 $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$ bzw.
 $f(x) > f(c) + f'(c)(x - c),$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle c an der Funktion f liegt niemals „oberhalb“ der Funktion).

- (2) f ist in I *konvex* (bzw. *streng konvex*) *von oben*

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x, c \in I$ mit $x \neq c$ gilt:
 $f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c)$ bzw.
 $f(x) < f(c) + f'(c)(x - c),$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle c an der Funktion f liegt niemals „unterhalb“ der Funktion).

Satz 7.14 Sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar. Dann gilt:
 f ist in I konvex (bzw. streng konvex) von unten gdw f' in I monoton
(bzw. streng monoton) wächst.

(Der Satz gilt analog für „von oben“ und „monoton fallend“.)

7/3/14
