

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient*)

7/1/3

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *differenzierbar*

$\overline{\text{Df}}$ f ist in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es existiert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in a .

$$\text{Bez. } f'(a) = \frac{df}{dx}(a).$$

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Definition. (*konvex*)

7/3/12

Sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar.

(1) f ist in I *konvex* (bzw. *streng konvex*) *von unten*

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x, c \in I$ mit $x \neq c$ gilt:

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c) \quad \text{bzw.}$$

$$f(x) > f(c) + f'(c)(x - c),$$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle c an der Funktion f liegt niemals „oberhalb“ der Funktion).

(2) f ist in I *konvex* (bzw. *streng konvex*) *von oben*

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x, c \in I$ mit $x \neq c$ gilt:

$$f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c) \quad \text{bzw.}$$

$$f(x) < f(c) + f'(c)(x - c),$$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle c an der Funktion f liegt niemals „unterhalb“ der Funktion).

Definition. (*Wendepunkt*)

7/3/30

Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ stetig und $c \in I$.

f besitzt in c einen *Wendepunkt*

$\overline{\text{Df}}$ f ist in (a, c) und in (c, b) differenzierbar und es gilt

(f ist in einer linksseitigen Umgebung von c streng konvex von unten und in einer rechtsseitigen Umgebung von c streng konvex von oben) oder

(f ist in einer linksseitigen Umgebung von c streng konvex von oben und in einer rechtsseitigen Umgebung von c streng konvex von unten).