

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Definition. (*konvex*)

7/3/12

Sei $a < b$ und f in $I = (a, b)$ differenzierbar.

(1) f ist in I *konvex* (bzw. *streng konvex*) *von unten*

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x, c \in I$ mit $x \neq c$ gilt:
 $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$ bzw.
 $f(x) > f(c) + f'(c)(x - c),$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle c an der Funktion f liegt niemals „oberhalb“ der Funktion).

(2) f ist in I *konvex* (bzw. *streng konvex*) *von oben*

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $x, c \in I$ mit $x \neq c$ gilt:
 $f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c)$ bzw.
 $f(x) < f(c) + f'(c)(x - c),$

(d.h., die Tangente an einer beliebigen Stelle c an der Funktion f liegt niemals „unterhalb“ der Funktion).

Definition. (*Wendepunkt*)

7/3/30

Sei $a < b$, f in $I = (a, b)$ stetig und $c \in I$.

f besitzt in c einen *Wendepunkt*

$\overline{\text{Df}}$ f ist in (a, c) und in (c, b) differenzierbar und es gilt

(f ist in einer linksseitigen Umgebung von c streng konvex von unten und in einer rechtsseitigen Umgebung von c streng konvex von oben) oder
(f ist in einer linksseitigen Umgebung von c streng konvex von oben und in einer rechtsseitigen Umgebung von c streng konvex von unten).

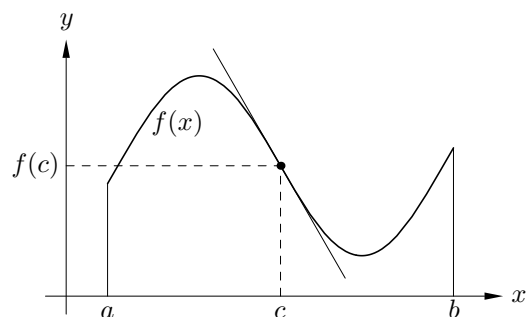


Abb. 7.13 a $f(x)$ besitzt in c einen Wendepunkt, denn in $[a, c]$ und in $[c, b]$ ist f streng konvex von oben bzw. streng konvex von unten.

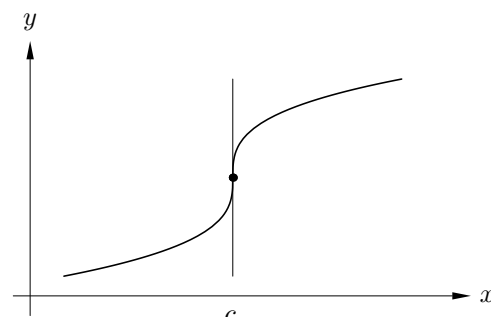


Abb. 7.13 b $f(x)$ ist in c nicht differenzierbar, besitzt aber in c einen Wendepunkt, denn die Konvexitätsbedingungen sind erfüllt.

7/3/31

Ein Wendepunkt markiert also die Umkehr des Konvexitätsverhaltens der betrachteten Funktion.