

## Kapitel 3

### Folgen von reellen Zahlen

#### 3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

**Definition.** (*gleichmäßige Konvergenz*)

3/2/12

Die Funktionenfolge  $(f_n)$  konvergiert in  $M$  gleichmäßig gegen  $f$

$\overline{\text{Df}}$  Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0$ , so daß für jedes  $n \geq n_0$  und für alle  $x \in M$  gilt:  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

## Kapitel 5

### Reelle Funktionen

#### 5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

**Definition.** (*Funktionenreihe*)

5/4/1

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen, die alle in  $M$  definiert sind, und es sei

$F_n := \sum_{i=0}^n f_i$  (die  $F_n$  sind also ebenfalls in  $M$  definierte Funktionen).

(1) Die Folge  $(F_n)$  heißt *Funktionenreihe*.

**Bez.:**  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$  bzw.  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$  oder einfach  $\sum f_i$  bzw.  $\sum f_i(x)$

(2)  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$  ist in  $M$  konvergent (bzw. gleichmäßig konvergent) gegen  $f$

$\overline{\text{Df}}$   $(F_n)$  ist in  $M$  konvergent (bzw. gleichmäßig konvergent) gegen  $f$ .

(3)  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$  ist in  $M$  absolut konvergent gegen  $f$

$\overline{\text{Df}}$   $\sum_{i=0}^{\infty} |f_i|$  ist in  $M$  konvergent gegen  $f$ .

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.4 Differenzierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

**Satz 7.22** (*Differenzierbarkeit der Grenzfunktion*)

7/4/1

Sei  $a < b$ ,  $I = [a, b]$  und  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen, die in dem Intervall  $I$  definiert sind. Dann gilt:

- (1) Konvergiert  $(f_n(c))$  für ein  $c \in I$  und sind alle  $f_n$  in  $I$  differenzierbar und ist  $(f'_n)$  in  $I$  gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion  $g$ , dann gibt es eine differenzierbare Funktion  $f$ , so daß  $(f_n)$  in  $I$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, und es ist  $f'(x) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ .

(Vertauschbarkeit des Limes mit der Differentiation)

- (2) Konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(c)$  für ein  $c \in I$  und sind alle  $f_n$  in  $I$  differenzierbar und

ist  $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$  in  $I$  gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion  $g$ , dann gibt

es eine differenzierbare Funktion  $f$ , so daß  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  in  $I$  gleichmäßig gegen

$f$  konvergiert, und es ist  $f'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ .

(eine solche Reihe darf gliedweise differenziert werden)