

Kapitel 3

Folgen von reellen Zahlen

3.2 Reelle Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Definition. (*gleichmäßige Konvergenz*)

3/2/12

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert in M gleichmäßig gegen f

$\stackrel{\text{Def}}{=}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 , so daß für jedes $n \geq n_0$ und für alle $x \in M$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.4 Stetigkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Satz 5.18 (*Cauchysches Konvergenzkriterium für die gleichmäßige Konvergenz*)

5/4/3

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) eine Folge von Funktionen, die alle in M definiert sind.

(1) (f_n) ist in M gleichmäßig konvergent gdw für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für alle $m, n \geq n_0$ und alle $x \in M$ gilt: $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

(2) $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ ist in M gleichmäßig konvergent gdw für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert,

so daß für alle $m, n \geq n_0$ und alle $x \in M$ gilt: $\left| \sum_{i=0}^m f_i(x) - \sum_{i=0}^n f_i(x) \right| < \varepsilon$

($\iff \left| \sum_{i=n+1}^m f_i(x) \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(x) \right| < \varepsilon$, falls $m > n$ und $m = n + k$).

Satz 5.21 (*Stetigkeit der Grenzfunktion*)

5/4/10

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine in M definierte Funktionenfolge, und alle f_n seien in a bzw. in ganz M stetig.

(1) Konvergiert (f_n) in M gleichmäßig gegen f , dann ist f in a bzw. in M stetig.

(2) Konvergiert $\sum f_n$ in M gleichmäßig gegen f , dann ist f in a bzw. in M stetig.

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Satz 7.9 (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Ist $a < b$ und f in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar, dann gibt es ein $c \in (a, b)$, so daß $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

7.4 Differenzierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen**Satz 7.22** (Differenzierbarkeit der Grenzfunktion)

Sei $a < b$, $I = [a, b]$ und (f_n) eine Folge von Funktionen, die in dem Intervall I definiert sind. Dann gilt:

- (1) Konvergiert $(f_n(c))$ für ein $c \in I$ und sind alle f_n in I differenzierbar und ist (f'_n) in I gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion g , dann gibt es eine differenzierbare Funktion f , so daß (f_n) in I gleichmäßig gegen f konvergiert, und es ist $f'(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

(Vertauschbarkeit des Limes mit der Differentiation)

- (2) Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(c)$ für ein $c \in I$ und sind alle f_n in I differenzierbar und ist $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ in I gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion g , dann gibt es eine differenzierbare Funktion f , so daß $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ in I gleichmäßig gegen f konvergiert, und es ist $f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$.

(eine solche Reihe darf gliedweise differenziert werden)

Beweis. (1). Wir zeigen zunächst, daß (f_n) in I gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert.

7/4/2

Dazu sei $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Dann erhält man (unter Ausnutzung des 1. Mittelwertsatzes der Differentialrechnung) für alle $x \in I$ und für hinreichend große m, n :

$$\begin{aligned}
 |f_m(x) - f_n(x)| &= |f_m(x) - f_m(c) + f_m(c) - f_n(c) + f_n(c) - f_n(x)| \\
 &\leq \underbrace{|f_m(c) - f_n(c)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \quad (\text{wegen der Konvergenz von } (f_n) \text{ in } c) \\
 &\quad + \underbrace{|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(c)|}_{= |(x-c)(f_m - f_n)'(\xi)|} \quad (\text{für ein } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } c) \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{|x - c|}_{\leq |b-a|} \underbrace{|f'_m(\xi) - f'_n(\xi)|}_{< \varepsilon'} \quad (\text{für alle } x \in I)
 \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + |b - a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(b - a)} = \varepsilon.$$

Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium existiert eine Funktion f , so daß (f_n) in I gleichmäßig gegen f konvergiert.

Es bleibt noch zu zeigen, daß f in I differenzierbar und $f' = g$ ist.

$$\text{Sei } c \in I \text{ und } g_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} & \text{für } x \neq c, \\ f'_n(c) & \text{für } x = c. \end{cases}$$

Da f in c differenzierbar ist, existiert der Limes des Differenzenquotienten, folglich ist g_n in c stetig. Wir zeigen zunächst, daß (f_n) in I gleichmäßig konvergiert.

Dazu sei $\varepsilon > 0$ und m, n seien hinreichend groß. Für $x = c$ gilt dann

$$|g_m(x) - g_n(x)| = |f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon.$$

Für $x \neq c$ erhält man

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &= \left| \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \\ &= \left| \frac{(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(c)}{x - c} \right| \\ &= |(f_m - f_n)'(\xi)| \quad (1. \text{ Mittelwertsatz der Differentialrechnung}) \\ &= |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| \\ &< \varepsilon. \quad ((f'_n) \text{ ist in } I \text{ gleichmäßig konvergent}) \end{aligned}$$

Folglich ist (g_n) nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Funktionenfolgen (Satz 5.18) gleichmäßig konvergent in I . Also gilt für $x \neq c$

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \\ &= \frac{1}{x - c} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) \right) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der Funktionen g_n in c und der gleichmäßigen Konvergenz von (g_n) folgt die Stetigkeit der Grenzfunktion g in c . Hieraus erhält man für $x \neq c$

$$g(c) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Damit existiert die 1. Ableitung von f an der Stelle c , und es gilt $f'(c) = g(c)$.

(2). Setzt man $F_n(x) := \sum_{i=0}^n f_i(x)$, dann ist nach Voraussetzung die Folge $(F_n(c))$ konvergent, alle F_n sind in I differenzierbar, $F'_n(x) = \sum_{i=0}^n f'_i(x)$, und (F'_n) konvergiert in I gleichmäßig gegen g .

Nach (1) existiert dann eine differenzierbare Funktion f , so daß (F_n) in I gleichmäßig gegen f konvergiert, und es ist

$$f'(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \right)' = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(x).$$

Daraus erhält man sofort

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x). \quad \square$$