

Kapitel 4

Unendliche Reihen; Potenzreihen

4.4 Potenzreihen

Definition. (*Konvergenzradius*)

4/4/5

Es sei ϱ eine nicht-negative reelle Zahl oder $\varrho = \infty$.

ϱ heißt *Konvergenzradius* von $\sum a_n(x-a)^n$

\equiv_{Df} Für jedes x gilt: Wenn $|x-a| < \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ absolut konvergent,
und wenn $|x-a| > \varrho$, so ist $\sum a_n(x-a)^n$ divergent.

(Hierbei soll immer gelten: $\{x : |x-a| < \infty\} = \mathbb{R}$ bzw. $= \mathbb{C}$ und $\{x : |x-a| > \infty\} = \emptyset$.)

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.4 Differenzierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Beweis. (1). Wir zeigen zunächst, daß f an der Stelle a differenzierbar ist. Es gilt 7/4/4

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^{n-1}.$$

Da durch Potenzreihen stetige Funktionen dargestellt werden, ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = a_1 = f'(a).$$

(Siehe Korollar zu Satz 5.21 und das Lemma zum Identitätssatz für Potenzreihen.)

Um die Differenzierbarkeit von f an einer beliebigen Stelle $b \in (a - \varrho, a + \varrho)$ mit $b \neq a$ nachweisen zu können, benutzen wir den Umordnungssatz für Potenzreihen (Satz 4.24), indem wir die Ausgangsreihe nach Potenzen von $x - b$ umordnen.

Es sei $\varrho' := \varrho - |b - a|$ (> 0). Für jedes $x \in (b - \varrho', b + \varrho')$ gilt dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-b)^n}_{:= g(x)}, \quad \text{wobei} \quad b_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m \binom{m}{n} (b-a)^{m-n}.$$

Nach den vorhergehenden Überlegungen ist $g(x)$ wenigstens an der Stelle b differenzierbar, und es ist

$$g'(b) = b_1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \binom{m}{1} (b-a)^{m-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (b-a)^{n-1}.$$

Wegen $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (b - \varrho', b + \varrho')$ ist $g'(b) = f'(b)$.

(2). Offenbar ist die (formal gliedweise) differenzierte Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ an jeder Stelle $b \in (a-\varrho, a+\varrho)$ konvergent, folglich ist ihr Konvergenzradius $\geq \varrho$. Wäre er $> \varrho$, dann gäbe es ein c mit $|c-a| > \varrho$, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(c-a)^{n-1}$ und somit auch $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(c-a)^n$ absolut konvergieren. Für $n \geq 1$ gilt offenbar

$$|a_n(c-a)|^n \leq |na_n(c-a)|^n.$$

Mit Hilfe des Majorantenkriteriums erhält man die Konvergenz von $\sum a_n(x-a)^n$ an der Stelle c . $\not M!$

Folglich haben $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ und $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ den gleichen Konvergenzradius. \square

Korollar. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho > 0$. Dann ist f in $(a-\varrho, a+\varrho)$ beliebig oft differenzierbar, und es ist

7/4/5

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-a)^m \right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) \cdot a_n(x-a)^{n-k} \\ &= k! \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} (x-a)^{n-k} = k! \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m}{k} (x-a)^m. \end{aligned}$$