

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.4 Differenzierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Satz 7.22 (Differenzierbarkeit der Grenzfunktion)

7/4/1

Sei $a < b$, $I = [a, b]$ und (f_n) eine Folge von Funktionen, die in dem Intervall I definiert sind. Dann gilt:

- (1) Konvergiert $(f_n(c))$ für ein $c \in I$ und sind alle f_n in I differenzierbar und ist (f'_n) in I gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion g , dann gibt es eine differenzierbare Funktion f , so daß (f_n) in I gleichmäßig gegen f konvergiert, und es ist $f'(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right)' = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

(Vertauschbarkeit des Limes mit der Differentiation)

- (2) Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(c)$ für ein $c \in I$ und sind alle f_n in I differenzierbar und ist $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ in I gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion g , dann gibt es eine differenzierbare Funktion f , so daß $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ in I gleichmäßig gegen f konvergiert, und es ist $f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$.

(eine solche Reihe darf gliedweise differenziert werden)

Beweis. (1). Wir zeigen zunächst, daß (f_n) in I gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert.

7/4/2

Dazu sei $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Dann erhält man (unter Ausnutzung des 1. Mittelwertsatzes der Differentialrechnung) für alle $x \in I$ und für hinreichend große m, n :

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |f_m(x) - f_m(c) + f_m(c) - f_n(c) + f_n(c) - f_n(x)| \\ &\leq \underbrace{|f_m(c) - f_n(c)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \quad (\text{wegen der Konvergenz von } (f_n) \text{ in } c) \\ &\quad + \underbrace{|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(c)|}_{= |(x-c)(f_m - f_n)'(\xi)|} \quad (\text{für ein } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } c) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{|x - c|}_{\leq |b-a|} \cdot \underbrace{|f'_m(\xi) - f'_n(\xi)|}_{< \varepsilon'} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |b-a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium existiert eine Funktion f , so daß (f_n) in I gleichmäßig gegen f konvergiert.

Es bleibt noch zu zeigen, daß f in I differenzierbar und $f' = g$ ist.

Sei $c \in I$ und $g_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} & \text{für } x \neq c, \\ f'_n(c) & \text{für } x = c. \end{cases}$

Da f in c differenzierbar ist, existiert der Limes des Differenzenquotienten, folglich ist g_n in c stetig. Wir zeigen zunächst, daß (f_n) in I gleichmäßig konvergiert.

Dazu sei $\varepsilon > 0$ und m, n seien hinreichend groß. Für $x = c$ gilt dann

$$|g_m(x) - g_n(x)| = |f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon.$$

Für $x \neq c$ erhält man

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &= \left| \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \\ &= \left| \frac{(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(c)}{x - c} \right| \\ &= |(f_m - f_n)'(\xi)| \quad (1. \text{ Mittelwertsatz der Differentialrechnung}) \\ &= |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| \\ &< \varepsilon. \quad ((f'_n) \text{ ist in } I \text{ gleichmäßig konvergent}) \end{aligned}$$

Folglich ist (g_n) nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Funktionenfolgen (Satz 5.18) gleichmäßig konvergent in I . Also gilt für $x \neq c$

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \\ &= \frac{1}{x - c} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) \right) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der Funktionen g_n in c und der gleichmäßigen Konvergenz von (g_n) folgt die Stetigkeit der Grenzfunktion g in c . Hieraus erhält man für $x \neq c$

$$g(c) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Damit existiert die 1. Ableitung von f an der Stelle c , und es gilt $f'(c) = g(c)$.

(2). Setzt man $F_n(x) := \sum_{i=0}^n f_i(x)$, dann ist nach Voraussetzung die Folge $(F_n(c))$ konvergent, alle F_n sind in I differenzierbar, $F'_n(x) = \sum_{i=0}^n f'_i(x)$, und (F'_n) konvergiert in I gleichmäßig gegen g .

Nach (1) existiert dann eine differenzierbare Funktion f , so daß (F_n) in I gleichmäßig gegen f konvergiert, und es ist

$$f'(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \right)' = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(x).$$

Daraus erhält man sofort

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x). \quad \square$$

Satz 7.23 (*Differentiation einer Potenzreihe*)

7/4/3

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine (reelle) Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho > 0$. Dann gilt:

$$(1) \quad f \text{ ist in } (a - \varrho, a + \varrho) \text{ differenzierbar und } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}.$$

(f kann gliedweise differenziert werden)

$$(2) \quad \text{Der Konvergenzradius von } \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \text{ ist ebenfalls } \varrho.$$

Beweis. (1). Wir zeigen zunächst, daß f an der Stelle a differenzierbar ist. Es gilt 7/4/4

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^{n-1}.$$

Da durch Potenzreihen stetige Funktionen dargestellt werden, ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = a_1 = f'(a).$$

(Siehe Korollar zu Satz 5.21 und das Lemma zum Identitätssatz für Potenzreihen.)

Um die Differenzierbarkeit von f an einer beliebigen Stelle $b \in (a - \varrho, a + \varrho)$ mit $b \neq a$ nachweisen zu können, benutzen wir den Umordnungssatz für Potenzreihen (Satz 4.24), indem wir die Ausgangsreihe nach Potenzen von $x - b$ umordnen.

Es sei $\varrho' := \varrho - |b - a| (> 0)$. Für jedes $x \in (b - \varrho', b + \varrho')$ gilt dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-b)^n}_{:= g(x)}, \quad \text{wobei} \quad b_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m \binom{m}{n} (b-a)^{m-n}.$$

Nach den vorhergehenden Überlegungen ist $g(x)$ wenigstens an der Stelle b differenzierbar, und es ist

$$g'(b) = b_1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \binom{m}{1} (b-a)^{m-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (b-a)^{n-1}.$$

Wegen $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (b - \varrho', b + \varrho')$ ist $g'(b) = f'(b)$.

(2). Offenbar ist die (formal gliedweise) differenzierte Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - a)^{n-1}$ an jeder Stelle $b \in (a - \varrho, a + \varrho)$ konvergent, folglich ist ihr Konvergenzradius $\geq \varrho$. Wäre er $> \varrho$, dann gäbe es ein c mit $|c - a| > \varrho$, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (c - a)^{n-1}$ und somit auch $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (c - a)^n$ absolut konvergieren. Für $n \geq 1$ gilt offenbar

$$|a_n(c - a)|^n \leq |n a_n (c - a)|^n.$$

Mit Hilfe des Majorantenkriteriums erhält man die Konvergenz von $\sum a_n (x - a)^n$ an der Stelle c . $\nabla!$

Folglich haben $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ und $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - a)^{n-1}$ den gleichen Konvergenzradius. \square

Korollar. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\varrho > 0$. Dann ist f in $(a - \varrho, a + \varrho)$ beliebig oft differenzierbar, und es ist 7/4/5

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - a)^m \right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) \cdot a_n (x - a)^{n-k} \\ &= k! \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} (x - a)^{n-k} = k! \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m}{k} (x - a)^m. \end{aligned}$$

Beweis. Den Beweis führt man leicht mit Hilfe des vorhergehenden Satzes induktiv über k . \square 7/4/6