

Kapitel 5

Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Definition. (*Stetigkeit*)

5/2/1

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(d.h., für jede ε -Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ -Umgebung von a , so daß $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$).

Definition. (*stetig in einer Menge*)

5/2/3

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(1) f ist *stetig in* M

$\overline{\text{Df}}$ f ist in jedem Punkt $a \in M$ stetig.

(2) f ist *stetig*

$\overline{\text{Df}}$ f ist im gesamten Definitionsbereich $D(f)$ stetig.

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition. (*rechtsseitiger bzw. linksseitiger Grenzwert*)

6/3/48

Sei a ein Häufungspunkt von $D_r(f, a) := D(f) \cap \{x : x > a\}$

bzw. von $D_l(f, a) := D(f) \cap \{x : x < a\}$.

f besitzt an der Stelle a (oder in a) den *rechtsseitigen* bzw. *linksseitigen Grenzwert* c

$\overline{\text{Df}}$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D_r(f, a)$ bzw.

für jedes $x \in D_l(f, a)$ gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - c| < \varepsilon$.

$$\text{Bez.: } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = c \quad \text{bzw.} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = c$$

Satz 6.21 Sei f in a definiert und a sei ein Häufungspunkt von $D_r(f, a)$ und von $D_l(f, a)$. Dann gilt:

f ist in a stetig $\iff f$ besitzt in a einen rechtsseitigen und einen linksseitigen Grenzwert und beide Werte sind gleich $f(a)$.

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Definition. (*rechtsseitige bzw. linksseitige Differenzierbarkeit*)

7/1/5

f ist in a *rechtsseitig* bzw. *linksseitig differenzierbar*

$\overline{\text{Df}}$ Es gibt eine Umgebung $U(a)$, so daß f in $U(a) \cap \{x : x \geq a\}$ bzw. in $U(a) \cap \{x : x \leq a\}$ definiert ist, und es existiert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \geq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \leq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Die Limits heißen (falls sie existieren) *rechtsseitige* bzw. *linksseitige Ableitung* der Funktion f .

Übungsaufgaben

14. Es sei

7/5/14

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x \leq 0, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d, & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{für } x > 1, \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x \leq 0, \\ Ax^2 + Bx + C, & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie reelle Zahlen a, b, c, d , so daß f in \mathbb{R} (stetig und) differenzierbar ist.
- (b) Läßt sich die für f formulierte Aufgabe auch für g lösen?