

Kapitel 5 Reelle Funktionen

5.2 Stetigkeit

Definition. (*Stetigkeit*)

5/2/1

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *stetig*
 \equiv_{Df} $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$
 gilt: Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
 (d.h., für jede ε -Umgebung von $f(a)$ gibt es eine δ -Umgebung von a , so daß $f(U_\delta) \subseteq U_\varepsilon$).

Satz 5.3 (*Folgenstetigkeit*)

5/2/14

Es sei $a \in D(f)$. Dann gilt:
 f ist in a stetig gdw für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ gilt:
 Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, so $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Satz 5.4 (*Stetigkeit der rationalen Operationen*)

5/2/17

Summe, Differenz, Produkt und Quotient von stetigen Funktionen sind stetig.

Satz 5.5 (*Stetigkeit der Verkettung*)

5/2/19

Seien f, g Funktionen mit $W(g) \subseteq D(f)$.
 Ist g in a stetig und f in $g(a)$ stetig, dann ist $f \circ g$ in a stetig.

Kapitel 7 Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung, Differentialquotient*)

7/1/3

f ist an der Stelle a (oder kurz in a) *differenzierbar*
 \equiv_{Df} f ist in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es existiert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Der Limes heißt (falls er existiert) *erste Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in a .

$$\text{Bez. } f'(a) = \frac{df}{dx}(a).$$

Übungsaufgaben

15. Es sei

7/5/15

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0; \end{cases} \quad n = 0, 1, 2.$$

Zeigen Sie:

- (a) f_0 ist in $x = 0$ unstetig,
- (b) f_1 ist in $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar,
- (c) f_2 ist in $x = 0$ differenzierbar.