

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.3 Anwendungen der Differentialrechnung; Grenzwerte für Quotienten von Funktionen

Satz 7.12 (Regel von de l'Hospital für „ $\frac{0}{0}$ “)

7/3/0

Voraussetzung:

- (1) Sei $a < b$ und seien f, g in (a, b) differenzierbar und in a (rechtsseitig) stetig.
- (2) Sei $f(a) = g(a) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$.

Behauptung:

Existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Korollar 1.

7/3/2

Voraussetzung:

- (1) Sei $a > 0$ und f, g seien in (a, ∞) differenzierbar.
- (2) Sei $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, \infty)$.

Behauptung:

Existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Korollar 2. (Regel von de l'Hospital für „ $\frac{\infty}{\infty}$ “)

7/3/4

Voraussetzung:

- (1) Sei $a < b$ und seien f, g in (a, b) differenzierbar.
- (2) Sei $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x) = \infty$ und $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$.

Behauptung:

Existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Bemerkung.

7/3/6

(1) Der Beweis läßt sich nicht unmittelbar auf den Fall „ $\frac{0}{0}$ “ zurückführen, denn differenziert man in $\left(\frac{1}{g}\right)/\left(\frac{1}{f}\right)$ Zähler und Nenner, dann kommen in der jeweiligen Ableitung f^2 bzw. g^2 vor, und über das Grenzwertverhalten des entsprechenden Quotienten dieser Funktionen weiß man nicht Bescheid.

(2) Satz 7.12 und die Korollare 1 und 2 können analog auf die folgenden Fälle übertragen werden:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \pm\infty.$$

(3) Häufig läßt sich der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ leichter bestimmen als $\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Daher sind die oben angegebenen Regeln oft sehr hilfreich bei der Berechnung solcher Limites.

(4) Einen Ausdruck der Form „ $0 \cdot \infty$ “ kann man in eine der Formen „ $\frac{0}{0}$ “ oder „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ überführen.

Denn wenn $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \dots} g(x) = \infty$, so ist

$$\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

falls diese Limites existieren.

(5) Ausdrücke der Form „ 0^0 “, „ ∞^0 “ und „ 1^∞ “ lassen sich auf die vorhergehenden Fälle zurückführen, indem man die Definition der Potenzfunktion mit Hilfe des natürlichen Logarithmus ausnutzt:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}.$$

$$\text{Wenn } f(x) \searrow 0, \text{ so } \ln f(x) \rightarrow -\infty,$$

$$\text{wenn } f(x) \rightarrow \infty, \text{ so } \ln f(x) \rightarrow \infty,$$

$$\text{wenn } f(x) \rightarrow 1, \text{ so } \ln f(x) \rightarrow 0.$$

Man versucht zunächst, den Grenzwert des Exponenten in $e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ zu bestimmen. Mit diesem Wert erhält man dann wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion den Grenzwert von $f(x)^{g(x)}$.

Übungsaufgaben

21. Berechnen Sie

7/5/21

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\tan 3x},$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{2x} \right), \quad x \rightarrow 0 \quad \text{bzw.} \quad x \rightarrow \infty,$

(b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(\sin 4x)}{\ln(\sin 3x)},$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}.$