

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Satz 7.11 (Satz von Taylor)

7/2/9

Sei I ein Intervall und $a \in I$. Ist f in I $(n+1)$ -mal differenzierbar, dann gibt es für jedes $x \in I$ ein $\vartheta (= \vartheta(x))$ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_n(x), \quad \text{wobei}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{(n+1)}.$$

($R_n(x)$ heißt Lagrange'sches Restglied, $p(x) := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$ heißt Taylorpolynom, wobei $f^{(0)}(x) := f(x)$, und $f(x) = p(x) + R_n(x)$ heißt Taylorsche Formel.)

Korollar. Es sei I ein Intervall mit $a \in I$, f sei in I beliebig oft differenzierbar, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$, wobei $p_n(x)$ das Taylorpolynom und $R_n(x)$ das Lagrange'sche Restglied in der Taylorschen Formel ist (siehe Satz 7.11). 7/2/12

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ für jedes $x \in I$, dann konvergiert die Folge $(p_n(x))$ der Partialsummen der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$ gegen $f(x)$.

(Unter den angegebenen Voraussetzungen läßt sich f in eine sog. Taylorreihe entwickeln, d.h.,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i.)$$

Übungsaufgaben

28. Bestimmen Sie so viele Glieder wie möglich in der Taylorentwicklung von

$$f(x) = 6 \sin x + x^2$$

in $a = 0$.

7/5/28