

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### Übungsaufgaben

1. (a) Zeigen Sie, daß für eine in  $a$  differenzierbare Funktion  $f$  im allgemeinen 7/5/1  
nicht gilt:  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{|x - a|}$ .  
(b) Man gebe ein Beispiel dafür an, daß die obige Gleichung erfüllt ist!
2. Es sei  $f(x) = x^2$ . Wie groß kann eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $U$  von 3 höchstens gewählt 7/5/2  
werden, so daß bei Ersetzung von  $f$  durch die Tangentenfunktion der Fehler in  $U$  stets kleiner als  $\frac{1}{100}$  ist?
3. Man begründe die folgenden Näherungsformeln: 7/5/3
  - (a)  $\sin x \approx x$  falls  $|x|$  „hinreichend klein“ ist,
  - (b)  $\cos x \approx \frac{\pi}{2} - x$  falls  $|\frac{\pi}{2} - x|$  „hinreichend klein“ ist,
  - (c)  $\ln x \approx x - 1$  falls  $|x - 1|$  „hinreichend klein“ ist,
  - (d)  $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$  falls  $|x|$  „hinreichend klein“ ist.
4. Zeigen Sie, daß die Ableitung einer differenzierbaren geraden Funktion ungerade 7/5/4  
und die Ableitung einer differenzierbaren ungeraden Funktion gerade ist!
5. Zeigen Sie, daß die Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$ , an der Stelle  $a = 0$  nicht 7/5/5  
(rechtsseitig) differenzierbar ist.
6. Bilden Sie die Ableitung folgender Funktionen: 7/5/6
  - (a)  $f(x) = (2x + x \cdot \sqrt[4]{x^3})^2$ ,
  - (b)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ ,
  - (c)  $f(x) = \sqrt{a \cdot \sin^2(xb) \cdot \cos^2 x}$ ,
  - (d)  $f(x) = x^3 \cdot e^{3x} \cdot \ln(x^2)$ ,
  - (e)  $f(x) = x^x$ ,
  - (f)  $f(x) = x^{\sin x}$ ,
  - (g)  $f(x) = (\sin x)^x$ .
7. Zeigen Sie: Sind  $f$  und  $g$  in  $a$   $n$ -mal differenzierbar, dann ist  $f \cdot g$  in  $a$   $n$ -mal 7/5/7  
differenzierbar und es ist
$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)}(a) \cdot g^{(n-i)}(a).$$
8. Folgende Funktionen sind auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit zu untersuchen: 7/5/8
  - (a)  $f(x) = |x - 2|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,
  - (b)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{für } x \leq -2, \\ 0, & \text{für } x > -2. \end{cases}$

9. Bilden Sie die Ableitung folgender Funktionen:

7/5/9

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \leq 0, \\ x^4 + 1, & \text{für } x > 0. \end{cases} \quad (b) \quad f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{für } x < 0, \\ e^x, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

10. (a) An die Funktion  $f(x) = e^x$  werde im Punkt  $(a, b)$  die Tangente gelegt. Die Tangente schneide die  $x$ -Achse an der Stelle  $c$ . Zeigen Sie, daß der Abstand zwischen  $a$  und  $c$  stets 1 beträgt. 7/5/10

- (b) Die an die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ , im Punkt  $(a, b)$  gelegte Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Man zeige, daß der Flächeninhalt des Dreiecks unabhängig von der Wahl des Punktes  $(a, b)$  ist.

11. (a) Für welchen Wert von  $a$  schneidet die Kurve  $y = f(x) = \frac{ax - x^3}{4}$  die  $x$ -Achse unter einem Winkel von  $45^\circ$ ? 7/5/11

- (b) Man bestimme die zu der Geraden  $y = x$  parallele Tangente an der Parabel  $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{3}$ .

- (c) Man gebe die Gleichung der zur  $x$ -Achse parallel verlaufenden Tangente an der Funktion  $f(x) = e^x + e^{-x}$  an.

12. Berechnen Sie:

7/5/12

(a)  $f^{(3)}$  von  $f(x) = x^5 \ln x$ ,

(b)  $f^{(50)}$  von  $f(x) = x^2 e^{2x}$ ,

(c)  $f^{(n)}$  von  $f(x) = \sin(ax)$ .

13. Es sei  $f(x)$   $n$ -mal differenzierbar und  $g(x) = x \cdot f(x)$ . Zeigen Sie, daß

7/5/13

$$g^{(n)}(x) = n \cdot f^{(n-1)}(x) + x \cdot f^{(n)}(x).$$

14. Es sei

7/5/14

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x \leq 0, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d, & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{für } x > 1, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x \leq 0, \\ Ax^2 + Bx + C, & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie reelle Zahlen  $a, b, c, d$ , so daß  $f$  in  $\mathbb{R}$  (stetig und) differenzierbar ist.

- (b) Läßt sich die für  $f$  formulierte Aufgabe auch für  $g$  lösen?

15. Es sei

7/5/15

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0; \quad n = 0, 1, 2. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- (a)  $f_0$  ist in  $x = 0$  unstetig,
- (b)  $f_1$  ist in  $x = 0$  stetig, aber nicht differenzierbar,
- (c)  $f_2$  ist in  $x = 0$  differenzierbar.

16. Es sei  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^3 \sin(\frac{1}{x}), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$

7/5/16

Zeigen Sie:

- (a)  $f$  ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  differenzierbar und  $f'(0) > 0$ ,
- (b)  $f'$  ist in  $\mathbb{R}$  stetig,
- (c)  $f$  ist in keiner Umgebung von 0 monoton.

Geben Sie eine Beziehung zwischen dem Monotonieverhalten von  $f$  und dem Vorzeichen von  $f'$  an.

17. Zeigen Sie mit Hilfe des 1. Mittelwertsatzes (der Differentialrechnung):

7/5/17

- (a) Für jedes  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ,
- (b) Für jedes  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$ ,
- (c) Für  $x > 0$  gilt:  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ .

18. Wenden Sie den Satz von Taylor auf die Funktion  $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$  an der Stelle  $a = 0$  an, und berechnen Sie damit  $\sqrt[3]{9}$  auf 8 Dezimalstellen genau.

7/5/18

19. Berechnen Sie mit Hilfe des Taylorschen Satzes:

7/5/19

- (a)  $\cos \frac{1}{10}$ , so daß der Fehler  $\leq 10^{-6}$  wird,
- (b)  $\ln 2$ , so daß der Fehler  $\leq 10^{-1}$  wird,
- (c)  $e^{\frac{1}{100}}$ , so daß der Fehler  $\leq 10^{-6}$  wird.

(Hinweis: Man betrachte bei Aufgabe (b) die Funktion  $\ln(1+x)$ .)

20. Man gebe die Taylorentwicklung für folgende Funktionen an der Stelle 0 an:

7/5/20

- (a)  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$ ,      (b)  $f(x) = \sqrt{1+x}$ ,      (c)  $f(x) = \ln(2+x)$ .

21. Berechnen Sie

7/5/21

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\tan 3x}$ ,      (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{2x}\right)$ ,  $x \rightarrow 0$  bzw.  $x \rightarrow \infty$ ,
- (b)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(\sin 4x)}{\ln(\sin 3x)}$ ,      (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ .

22. Geben Sie ein Polynom an, das die Funktion  $\ln(1+x)$  im Intervall  $[0, \frac{1}{2}]$  bis auf zwei Stellen hinter dem Komma genau annähert. 7/5/22
23. Untersuchen Sie das Konvexitätsverhalten der folgenden Funktionen: 7/5/23
- (a)  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ ,
- (b)  $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x-4}$ .
24. Untersuchen Sie die Funktion  $f(x) = \cos x - x + 1$  auf Nullstellen, lokale Extremwerte, Wendepunkte, Verhalten in  $\pm\infty$ . 7/5/24  
Skizzieren Sie die durch  $f(x)$  definierte Kurve.
25. Führen Sie für folgende Funktionen eine Kurvendiskussion durch: 7/5/25
- (a)  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ,
- (b)  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ .
26. Für die folgenden Funktionen führe man eine Kurvendiskussion durch: 7/5/26
- (a)  $f(x) = x - \sin x$ , (c)  $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ ,
- (b)  $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$ , (Aufgabe (c) mit Zeichnung !)
27. Berechnen Sie die ersten drei Glieder der Taylorentwicklung von 7/5/27  
 $p(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$   
in  $a = 2$ .
28. Bestimmen Sie so viele Glieder wie möglich in der Taylorentwicklung von 7/5/28  
 $f(x) = 6 \sin x + x^2$   
in  $a = 0$ .
29. Ist der Fehler bei der Näherung 7/5/29  
$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$
für  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  kleiner als  $\frac{1}{100}$ ?  
Bestimmen Sie damit  $\sqrt{e}$  auf 3 Stellen genau.
30. Prüfen Sie, ob in den folgenden Fällen die Voraussetzungen der Regel von de l'Hospital erfüllt sind, und bestimmen Sie die betreffenden Grenzwerte: 7/5/30
- (a)  $\frac{e^x - 1}{\sin x}$  für  $x \rightarrow 0$ ,
- (b)  $\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cdot \cos x}$  für  $x \rightarrow 0$ ,
- (c)  $\frac{\ln x}{\ln(\sin x)}$  für  $x \searrow 0$ .

31. Berechnen Sie mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital die folgenden Grenzwerte: 7/5/31

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}, & \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x} + x}, \\ \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}, & \text{(d)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2^x - 1)^{\sin x}. \end{array}$$

32. Mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital bestimme man folgende Grenzwerte: 7/5/32

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\sin x)^x, & \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \cdot \tan x, \\ \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{-x}}{1 - x - \log_a(a - x)}, & \text{(e)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{\arcsin \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a}}}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \\ \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, & \text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}. \end{array}$$

33. Eine in einer Umgebung  $U$  von  $a$  definierte Funktion  $f$  heißt an der Stelle  $a$  7/5/33  
 lokal monoton wachsend, wenn gilt:

für alle  $x \in U$  mit  $x < a$  ist  $f(x) < f(a)$  und

für alle  $x \in U$  mit  $x > a$  ist  $f(x) > f(a)$ .

(a) Zeigen Sie:

Ist  $f$  in  $a$  differenzierbar und ist  $f'(a) > 0$ , so ist  $f$  in  $a$  lokal monoton wachsend.

(b) Man zeige durch ein Beispiel, daß nicht gilt:

Ist  $f'(a) > 0$ , so existiert eine Umgebung  $U$  von  $a$ , in welcher  $f$  monoton wächst.

34. Zeigen Sie, daß die Funktion  $f$  mit 7/5/34

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left( 2 + \sin \frac{1}{x} \right), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle 0 ein lokales Extremum hat, ohne links und rechts von 0 eindeutiges Monotonieverhalten zu zeigen, d.h., es existiert kein  $\varepsilon > 0$ , so daß  $f$  in  $(-\varepsilon, 0)$  und in  $(0, \varepsilon)$  monoton ist.

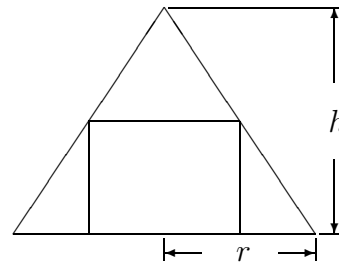
35. Beweisen Sie die folgende Aussage („Schranksatz“): 7/5/35

Es sei  $f$  in einem Intervall  $I$  differenzierbar; es sei  $m$  eine untere und  $M$  eine obere Schranke für den Anstieg einer beliebigen Tangente an  $f$  in  $I$ . Dann liegt auch der Anstieg einer beliebigen Sekante in  $I$  zwischen  $m$  und  $M$ .

36. Das Maximum einer in einem Intervall  $I = [a, b]$  definierten Funktion  $f$  könnte 7/5/36  
 man näherungsweise wie folgt bestimmen:

Man unterteilt  $I$  in gleich lange Teilintervalle, berechnet die Funktionswerte an allen Teilungspunkten und sucht sich den größten Funktionswert heraus.

- (a) Es sei nun  $f$  in  $I$  differenzierbar und  $|f'(x)| < c$  für alle  $x \in I$ . Man schätze den Fehler ab, den man bei der oben beschriebenen Methode begeht.
- (b) Wie fein müßte man bei der Berechnung des Maximums der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \sin(\ln x) + \cos 3x$  im Intervall  $[\pi, 2\pi]$  die Unterteilung wählen, um sicher zu sein, daß das berechnete Maximum höchstens um 0,01 vom tatsächlichen abweicht?
37. Die Zahl 8 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß die Summe der Kuben dieser Summanden am kleinsten ist. 7/5/37
38. Welche positive Zahl ergibt bei Addition ihrer Reziproken die kleinste Summe? 7/5/38
39. Welche Länge muß die Grundseite eines regulären dreieckigen Prismas mit gegebenem Volumen haben, damit die Oberfläche minimal wird? 7/5/39
40. Ein oben offenes zylindrisches Gefäß mit kreisförmiger Grundfläche soll ein vorgeschriebenes Volumen  $V$  besitzen. Der Herstellungspreis für  $1\text{m}^2$  Mantelfläche betrage  $a$ , derjenige für  $1\text{m}^2$  Grundfläche betrage  $b$ , ( $a, b > 0$ ). Welche Abmessungen muß das Gefäß haben, damit die Herstellungskosten möglichst gering sind? 7/5/40
41. Von allen Quadern mit quadratischer Grundfläche, für die das Verhältnis von Volumen zur Oberfläche einen gegebenen Wert besitzt, soll derjenige bestimmt werden, für den der Mantel möglichst klein wird. 7/5/41
42. Einem geraden Kreiskegel mit dem Radius  $r$  und der Höhe  $h$  soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden (vgl. Zeichnung). Welche Abmessungen muß der Kreiszylinder haben, damit sein Volumen möglichst groß wird. 7/5/42



43.  $n$  und  $k$  seien gegebene ganze Zahlen. Für welche Werte von  $n$  und  $k$  läßt sich  $n$  in eine Summe von zwei ganzen Zahlen  $x, y$  zerlegen, so daß bezüglich aller Zerlegungen  $n = x + y$  der Ausdruck  $x^k + y^k$  einen möglichst kleinen Wert besitzt? 7/5/43
44. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist eine Gerade durch den Punkt  $(1, 2)$  so zu legen, daß sie mit den positiven Koordinatenachsen ein Dreieck mit möglichst kleinem Flächeninhalt einschließt. Geben Sie die Gleichung der Geraden an. 7/5/44
45. In eine gegebene Halbkugel vom Radius  $R$  soll ein gerader Kegel einbeschrieben werden, dessen Spitze im Mittelpunkt der Grundfläche der Halbkugel liegt. Wie sind die Abmessungen des Kegels zu wählen, so daß sein Volumen möglichst groß wird? 7/5/45

46. Beim Kugelstoßen ist die Wurfweite

7/5/46

$$w(\alpha) = \frac{v^2}{g} \cdot \cos \alpha \left( \sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{2gh}{v^2}} \right).$$

Dabei ist  $\alpha$  der Abwurfwinkel,  $v$  die Abwurfgeschwindigkeit,  $h$  die Abwurfhöhe (sie beträgt etwa  $\frac{6}{5}$  der Körperhöhe).

Für welchen Winkel  $\alpha$  ist die Wurfweite am größten?

Zahlenbeispiel:  $h = 2m$ ,  $v = 11 \frac{m}{s}$ ,  $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$ .

47. Ein Gefäß mit senkrechter Wandung stehe auf einer horizontalen Ebene. Seine Höhe sei  $h$ . Aus einer (waagerechten) Öffnung in der Gefäßwand dringe ein Flüssigkeitsstrahl.

7/5/47

Man bestimme die Lage der Öffnung, für die der Strahl die größte Weite erzielt, wenn die Geschwindigkeit der ausströmenden Flüssigkeit nach dem Gesetz von TORRICELLI gleich  $\sqrt{2gx}$  ist, wobei  $x$  die Höhe der Öffnung unter dem Flüssigkeitsspiegel angibt.

48. Von einem Kanal der Breite  $a$  gehe unter einem rechten Winkel ein anderer Kanal mit der Breite  $b$  aus. Die Wände der Kanäle seien geradlinig.

7/5/48

Wie lang darf ein Balken (dessen Breite unberücksichtigt bleibt) höchstens sein, der von einem Kanal in den anderen geflößt werden soll?

49. Es sei  $\mathfrak{k} := \{(t, t^2) \in \mathbb{R} : t \in \mathbb{R}\}$ .

7/5/49

Bestimmen Sie den Punkt von  $\mathfrak{k}$ , der dem Punkt  $(6, 3) \in \mathbb{R}$  am nächsten liegt (falls ein solcher existiert).

50. Eine zylinderförmige Blechbüchse mit einem Liter Inhalt soll mit möglichst wenig Materialaufwand hergestellt werden (Oberfläche minimal).

7/5/50

Geben Sie die Abmessungen einer solchen Büchse an.

51. Die Magnetisierungskurve von Eisen ist nach KOEPPPEL durch  $B = e^{\frac{H}{a+bH}}$  gegeben ( $H$  ist die magnetische Feldstärke,  $B$  die Induktion,  $a, b$  sind Konstanten).

7/5/51

Für welchen Wert von  $H$  hat die Permeabilität  $\mu = \frac{B}{H}$  einen größten bzw. kleinsten Wert?