

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.4 Differenzierbarkeit der Grenzfunktion bei Folgen und Reihen von Funktionen

Satz 7.22 (*Differenzierbarkeit der Grenzfunktion*)

7/4/1

Sei $a < b$, $I = [a, b]$ und (f_n) eine Folge von Funktionen, die in dem Intervall I definiert sind. Dann gilt:

- (1) Konvergiert $(f_n(c))$ für ein $c \in I$ und sind alle f_n in I differenzierbar und ist (f'_n) in I gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion g , dann gibt es eine differenzierbare Funktion f , so daß (f_n) in I gleichmäßig gegen f konvergiert, und es ist $f'(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

(Vertauschbarkeit des Limes mit der Differentiation)

- (2) Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(c)$ für ein $c \in I$ und sind alle f_n in I differenzierbar und ist $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ in I gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion g , dann gibt es eine differenzierbare Funktion f , so daß $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ in I gleichmäßig gegen f konvergiert, und es ist $f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$.

(eine solche Reihe darf gliedweise differenziert werden)

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 7

- Differenzierbarkeit der Grenzfunktion bei gleichmäßig konvergenten Funktionenfolgen und -reihen (Satz 7.22),

7/6/13