

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Beispiele.

5. Es sei $f(x) = e^x$.

7/1/8/5

Behauptung: $f'(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x \neq a$. Dann ist

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \cdot \frac{e^h - 1}{h}, \quad \text{für } h := x - a.$$

g.z.z.: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$

Es ist

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}.$$

Diese Reihe ist für alle $h \in \mathbb{R}$ absolut konvergent. Nach dem Lemma zum Identitätssatz für Potenzreihen (Kapitel 4, 4/5/7/2) sind Potenzreihen in ihrem Mittelpunkt stetig.

Der Mittelpunkt ist hier 0, folglich gilt für jede Folge $h_\nu \rightarrow 0$

$$g(h_\nu) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_\nu^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_\nu^n}{(n+1)!} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 1,$$

Also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

6. Es sei $f(x) = \sin x$.

7/1/8/6

Behauptung: $f'(x) = \cos x$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x \neq a$. Dann ist

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = 2 \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} =$$

$$\cos \frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos \frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin h}{h} \quad \text{für } h := \frac{x-a}{2}.$$

Für $x \rightarrow a$ gilt $h \rightarrow 0$ und umgekehrt.

\cos ist stetig, folglich ist $\lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = \cos \frac{a+a}{2} = \cos a$.

g.z.z.: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$

Es ist

$$\frac{\sin h}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Analog wie im 5. Beispiel ist diese Potenzreihe ebenfalls in ihrem Mittelpunkt 0 stetig. Folglich ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{h^{2n}}{(2n+1)!} = 1.$$

Also

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a = \sin' a.$$

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 7

- Differenzierbarkeit von $\sin x$ und e^x (global erläutern);

7/6/3
