

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Satz 7.8 (Satz von Rolle)

7/2/0

Ist $a < b$ und f in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar und ist $f(a) = f(b)$, dann existiert ein $c \in (a, b)$, so daß $f'(c) = 0$.

Satz 7.9 (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

7/2/2

Ist $a < b$ und f in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar, dann gibt es ein $c \in (a, b)$, so daß $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Satz 7.10 (2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

7/2/6

Ist $a < b$ und sind f und g in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar und ist $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$, so daß $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

(Das bedeutet, daß der Quotient des Anstiegs der Sekanten beider Funktionen in dem Intervall $[a, b]$ gleich dem Quotienten des Anstiegs der Tangenten an einer geeigneten Zwischenstelle ist.)

Satz 7.11 (Satz von Taylor)

7/2/9

Sei I ein Intervall und $a \in I$. Ist f in I $(n+1)$ -mal differenzierbar, dann gibt es für jedes $x \in I$ ein $\vartheta (= \vartheta(x))$ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n + R_n(x), \quad \text{wobei}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x - a))}{(n + 1)!} \cdot (x - a)^{(n+1)}.$$

($R_n(x)$ heißt Lagrange'sches Restglied, $p(x) := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x - a)^i$ heißt Taylorpolynom, wobei

$f^{(0)}(x) := f(x)$, und $f(x) = p(x) + R_n(x)$ heißt Taylorsche Formel.)

Schwerpunkte für die Wiederholung von Kapitel 7

- Satz von Rolle (Der Beweis ist von grundlegender Bedeutung!), 1. und 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Satz von Taylor;

7/6/6