

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Satz 6.8 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$ und $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: 6/2/5
 f ist in \bar{a} stetig gdw f_1, \dots, f_m in \bar{a} stetig sind.

(D.h., Stetigkeit bei Vektorfunktionen ist komponentenweise Stetigkeit.)

Satz 6.11 In euklidischen Räumen sind Summe, Differenz, Produkt, Quotient und die Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig. (Beim Produkt bzw. beim Quotienten werden nur solche Funktionen zugelassen, die aus \mathbb{R}^n in \mathbb{R} abbilden!) 6/2/16

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Satz 8.1 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$. 8/1/9
 Ist f in \bar{c} differenzierbar, dann ist f in \bar{c} stetig.

Beweis. Sei f in \bar{c} differenzierbar. Dann existiert eine Umgebung $U(\bar{c})$, so daß für jedes $\bar{x} \in U(\bar{c})$ gilt: $f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = A(\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x})$. 8/1/10

g.z.z. : $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} (f(\bar{x}) - f(\bar{c})) = \bar{0}$.

Offenbar gilt $o(\bar{x}) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \bar{0}$.

Nach Satz 6.8 ist eine Vektorfunktion stetig, wenn alle ihre Komponenten stetig sind. Dies trifft insbesondere auf $A(\bar{x} - \bar{c})$ zu. Die Komponenten sind aber als lineare Funktionen (nach Satz 6.11) stetig. Folglich gilt auch $A(\bar{x} - \bar{c}) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \bar{0}$.

Hieraus folgt die Behauptung. □