

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

**Definition.** (*Stetigkeit in metrischen Räumen*)

6/2/2

Sei  $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$  und  $a \in \mathbb{M}_1$ .

$f$  ist in  $a$  stetig

$\overline{\text{Df}}$   $a \in D(f)$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für jedes  $x \in D(f)$  gilt: Wenn  $\varrho_1(x, a) < \delta$ , so  $\varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .

(Andere Formulierung: Wenn  $x \in U_\delta(a)$ , so  $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ .)

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.1 Differenzierbarkeit

**Definition.** (*partielle Ableitung*)

8/1/4

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  und  $f$  in einer Umgebung  $U(\bar{c})$  definiert.

$f$  ist in  $\bar{c}$  partiell nach  $x_i$  differenzierbar ( $i = 1, \dots, n$ )

$\overline{\text{Df}}$  Die Funktion  $\varphi(x_i) := f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$  ist (als Funktion der einen Veränderlichen  $x_i$ ) an der Stelle  $c_i$  differenzierbar.

Nach der früheren Differenzierbarkeitsdefinition bedeutet dies, daß die folgenden Limites existieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{\varphi(x_i) - \varphi(c_i)}{x_i - c_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(c_i + h) - \varphi(c_i)}{h}, \quad \text{für } h := x_i - c_i \\ &= \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - f(\bar{c})}{x_i - c_i}. \end{aligned}$$

Der Limes selbst (falls er existiert) heißt *partielle Ableitung* von  $f$  nach  $x_i$  an der Stelle  $\bar{c}$  (oder kurz: in  $\bar{c}$ ).

$$\text{Bez.: } \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = f_{x_i}(\bar{c}).$$

**Bemerkung.** Aus der partiellen Differenzierbarkeit nach allen Variablen folgt im allgemeinen noch nicht die Stetigkeit, wie das folgende Beispiel zeigt.

8/1/11