

Kapitel 6

Der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

6.2 Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Definition. (*Stetigkeit in metrischen Räumen*)

6/2/2

Sei $f : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ und $a \in \mathbb{M}_1$.

f ist in a stetig

$\overline{\text{Def}}$ $a \in D(f)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in D(f)$ gilt: Wenn $\varrho_1(x, a) < \delta$, so $\varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

(Andere Formulierung: Wenn $x \in U_\delta(a)$, so $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.)

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Das Wesen der Differenzierbarkeit besteht auch hier in der linearen Approximierbarkeit einer Funktion f in einer Umgebung $U(\bar{c})$; d.h., f läßt sich in $U(\bar{c})$ darstellen als $f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ plus einem Rest $o(\bar{x})$, der in $U(\bar{c})$ „klein“ ist, wobei hier 'klein' bedeuten soll, daß $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = \bar{0} \quad (\in \mathbb{R}^m)$.

8/1/3

Durch $\bar{y} = A(\bar{x} - \bar{c})$ wird eine Punktmenge in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ beschrieben.

Die durch $\bar{y} := t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ definierte Punktmenge heißt *Tangentialebene* von f an der Stelle \bar{c} , und $t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ heißt *Gleichung der Tangentialebene*.

Der Punkt $(\bar{c}, f(\bar{c}))$ erfüllt diese Gleichung, d.h., er liegt in der Tangentialebene.

Der Anteil $A(\bar{x} - \bar{c})$ von der Funktion $t(\bar{x})$ heißt *Differential* (oder *1. Differential*) von f in \bar{c} .

Wir werden auf diese Begriffe noch einmal zurückkommen, insbesondere im Zusammenhang mit der Berechnung und Darstellung der Ableitung und damit auch der Tangentialebene und des Differentials.

Um die Analogie bei der Differenzierbarkeit von Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher besser zu veranschaulichen, betrachten wir die folgenden beiden Spezialfälle.

Für $n = m = 1$ (also $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$) definiert $t(x) = f(c) + \underbrace{A}_{:=b}(x - c)$ eine

Gerade in $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, die Tangente von f an der Stelle c .

Für $n = 2, m = 1$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$ wird durch $t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ eine Ebene in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ bestimmt, die offenbar den Punkt $(\bar{c}, f(\bar{c}))$ enthält. In diesem Fall ist der Begriff „*Tangentialebene*“ wörtlich zu nehmen.

Wir haben bereits die Ableitung einer Funktion mit mehreren Veränderlichen definiert, wir haben aber noch kein praktikables Verfahren, um die Ableitung einer konkreten

Funktion zu berechnen. Dazu betrachten wir zunächst Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und definieren den Begriff der partiellen Ableitbarkeit.

Definition. (*partielle Ableitung*)

8/1/4

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert. f ist in \bar{c} *partiell nach x_i differenzierbar* ($i = 1, \dots, n$)

$\overline{\text{Def}}$ Die Funktion $\varphi(x_i) := f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$ ist (als Funktion der einen Veränderlichen x_i) an der Stelle c_i differenzierbar.

Nach der früheren Differenzierbarkeitsdefinition bedeutet dies, daß die folgenden Limites existieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{\varphi(x_i) - \varphi(c_i)}{x_i - c_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(c_i + h) - \varphi(c_i)}{h}, \quad \text{für } h := x_i - c_i \\ &= \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - f(\bar{c})}{x_i - c_i}. \end{aligned}$$

Der Limes selbst (falls er existiert) heißt *partielle Ableitung* von f nach x_i an der Stelle \bar{c} (oder kurz: in \bar{c}).

Bez.: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = f_{x_i}(\bar{c}).$

Bemerkung. Ist f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert und nach allen Variablen partiell differenzierbar und sind alle partiellen Ableitungen in \bar{c} stetig, dann läßt sich $f(\bar{x})$ in $U(\bar{c})$ durch die Funktion

8/1/16

$$t(\bar{x}) := f(\bar{c}) + \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c})}_{:= a_i \in \mathbb{R}} \cdot (x_i - c_i)$$

linear approximieren. Es gilt also $f(\bar{x}) = t(\bar{x}) + o(\bar{x})$.