

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung*)

8/1/1

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

f ist in \bar{c} differenzierbar (oder total differenzierbar)

$\overline{\text{Df}}$ f ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert, und es existiert eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $o(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = \bar{0}, \text{ so daß für jedes } \bar{x} \in U(\bar{c}) \text{ gilt: } f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x}).$$

Die Matrix A heißt dann 1. Ableitung von f an der Stelle \bar{c} .

Bez.: $A := f'(\bar{c})$.

Als wichtigsten Spezialfall erhält man die Differenzierbarkeit bzw. die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$. A besteht in diesem Falle nur aus einer Zeile. Die Ableitung $f'(\bar{c})$ ist dann ein Vektor (im allgemeinen ist $f'(\bar{c})$ eine Matrix). Dieser Vektor heißt auch *Gradient* von f an der Stelle \bar{c} (oder kurz in \bar{c}).

8/1/2

Bez.: $f'(\bar{c}) = \text{grad } f(\bar{c})$.