

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.1 Differenzierbarkeit

**Beweis.** Wir betrachten hier nur den Spezialfall  $n = 3$ . Dazu sei  $\bar{x} = (x, y, z)$  und  $\bar{c} = (a, b, c)$  (den allgemeinen Fall beweist man analog). 8/1/15

Mit Hilfe des 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung (leicht modifiziert) erhält man

$$\begin{aligned}
 f(\bar{x}) - f(\bar{c}) &= f(x, y, z) - f(a, b, c) = \\
 &= f(x, y, z) - f(a, y, z) + f(a, y, z) - f(a, b, z) + f(a, b, z) - f(a, b, c) = \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(\underbrace{a + \vartheta_1(x - a), y, z}_{:= \bar{u}}) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\underbrace{a, b + \vartheta_2(y - a), z}_{:= \bar{v}}) \cdot (y - b) + \\
 &+ \frac{\partial f}{\partial z}(\underbrace{a, b, c + \vartheta_3(z - c)}_{:= \bar{w}}) \cdot (z - c) = \quad \text{(nach dem 1. Mittelwertsatz)} \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{u}) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{v}) \cdot (y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{w}) \cdot (z - c) = \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{c}) \cdot (y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{c}) \cdot (z - c) + \\
 &+ \underbrace{\left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{u}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \right] \cdot (x - a) + \cdots + \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{w}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \right] \cdot (z - c)}_{:= r(\bar{x})}.
 \end{aligned}$$

Folglich ist

$$f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \cdot (x - a) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{c}) \cdot (z - c) + r(\bar{x}).$$

Behauptung:  $\frac{r(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0$ .

Nach Voraussetzung sind die partiellen Ableitungen in  $\bar{c}$  stetig, folglich gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so daß für jedes  $\bar{x}$  mit  $|\bar{x} - \bar{c}| < \delta$  gilt:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{(im allgemeinen Fall ist der Betrag } < \frac{\varepsilon}{n}).$$

Die obige Abschätzung gilt auch entsprechend für die partiellen Ableitungen nach  $y$  und nach  $z$ .

Offenbar gilt:

$$|\bar{x} - \bar{c}| < \delta \implies |\bar{u} - \bar{c}|, \dots, |\bar{w} - \bar{c}| < \delta,$$

denn  $0 < \vartheta_i < 1$  für alle  $i$ .

Folglich ist erst recht

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{u}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad \text{analog für } \bar{v} \text{ und } \bar{w}.$$

Damit ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |r(\bar{x})| &\leq \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{u}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \cdot \underbrace{|x - a|}_{\leq |\bar{x} - \bar{c}|} + \cdots + \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{w}) - \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{c}) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \cdot \underbrace{|z - c|}_{\leq |\bar{x} - \bar{c}|} \\ &\leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} \cdot |\bar{x} - \bar{c}| = \varepsilon \cdot |\bar{x} - \bar{c}|. \end{aligned}$$

Also

$$\frac{|r(\bar{x})|}{|\bar{x} - \bar{c}|} \leq \varepsilon \quad \text{für } 0 < |\bar{x} - \bar{c}| < \delta.$$

Hieraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 8.4** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  und  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ .

8/1/19

Ist  $f$  in  $\bar{c}$  differenzierbar (d.h., es gibt eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , also eine  $(m \times n)$ -Matrix  $A = (a_{ji})_{\substack{j=1, \dots, m \\ i=1, \dots, n}}$ , so daß  $f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x})$  für alle  $\bar{x}$  in einer Umgebung  $U(\bar{c})$ ), dann existieren alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ , und es ist  $a_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$ .

(Die Abbildung  $A$  ist also eindeutig bestimmt durch die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$ .)

**Beweis.** Den Beweis führt man analog wie zum Satz 8.2.  $\square$

8/1/20