

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

Das Wesen der Differenzierbarkeit besteht auch hier in der linearen Approximierbarkeit einer Funktion f in einer Umgebung $U(\bar{c})$; d.h., f läßt sich in $U(\bar{c})$ darstellen als $f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ plus einem Rest $o(\bar{x})$, der in $U(\bar{c})$ „klein“ ist, wobei hier 'klein' bedeuten soll, daß $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = 0 \quad (\in \mathbb{R}^m)$. 8/1/3

Durch $\bar{y} = A(\bar{x} - \bar{c})$ wird eine Punktmenge in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ beschrieben.

Die durch $\bar{y} := t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ definierte Punktmenge heißt *Tangentialebene* von f an der Stelle \bar{c} , und $t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ heißt *Gleichung der Tangentialebene*.

Der Punkt $(\bar{c}, f(\bar{c}))$ erfüllt diese Gleichung, d.h., er liegt in der Tangentialebene.

Der Anteil $A(\bar{x} - \bar{c})$ von der Funktion $t(\bar{x})$ heißt *Differential* (oder *1. Differential*) von f in \bar{c} .

Wir werden auf diese Begriffe noch einmal zurückkommen, insbesondere im Zusammenhang mit der Berechnung und Darstellung der Ableitung und damit auch der Tangentialebene und des Differentials.

Um die Analogie bei der Differenzierbarkeit von Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher besser zu veranschaulichen, betrachten wir die folgenden beiden Spezialfälle.

Für $n = m = 1$ (also $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$) definiert $t(x) = f(c) + \underbrace{A}_{:=b}(x - c)$ eine

Gerade in $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, die Tangente von f an der Stelle c .

Für $n = 2, m = 1$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$ wird durch $t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ eine Ebene in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ bestimmt, die offenbar den Punkt $(\bar{c}, f(\bar{c}))$ enthält. In diesem Fall ist der Begriff „*Tangentialebene*“ wörtlich zu nehmen.

Wir haben bereits die Ableitung einer Funktion mit mehreren Veränderlichen definiert, wir haben aber noch kein praktikables Verfahren, um die Ableitung einer konkreten Funktion zu berechnen. Dazu betrachten wir zunächst Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und definieren den Begriff der partiellen Ableitbarkeit.

Beispiel.

Es sei $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Gesucht ist die Gleichung der Tangentialebene von f an der Stelle $\bar{c} = (1, 1)$.

(vgl. Abb. 8.5; ein weiteres Beispiel für die Darstellung einer Funktion und der Tangentialebene an einer Stelle ist in den Abb. 8.6 a und 8.6 b gegeben.)

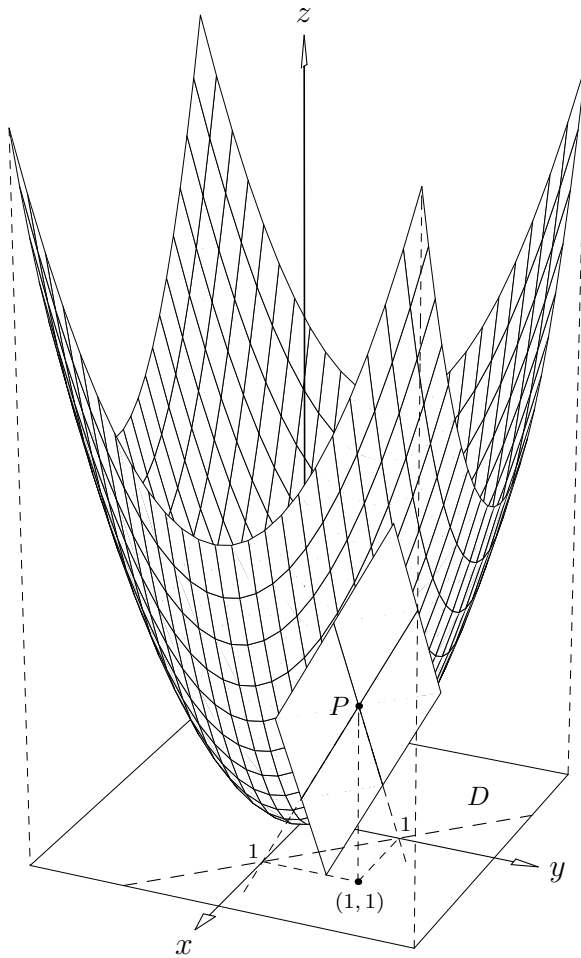


Abb. 8.5 Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ mit dem Definitionsbereich $D := [-2, 2] \times [-2, 2]$ und der Tangentialebene an der Stelle $(1, 1)$ bzw. im Punkt $P := (1, 1, 2)$. Das „Kreuz“ in der Tangentialebene entsteht durch die Tangenten an den entsprechenden Kurven im Punkt P in Richtung der Achsen. Die dicker gestrichelte Linie symbolisiert den Schnitt der Tangentialebene mit der durch D gegebenen Ebene.

Es ist

$$f(1, 1) = 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} z = t(x, y) &= f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \cdot (x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \cdot (y - 1) \\ &= 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1). \end{aligned}$$

Die Ebene geht durch die drei Punkte $(1, 1, 2), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$, wodurch die Ebene schon eindeutig bestimmt ist.

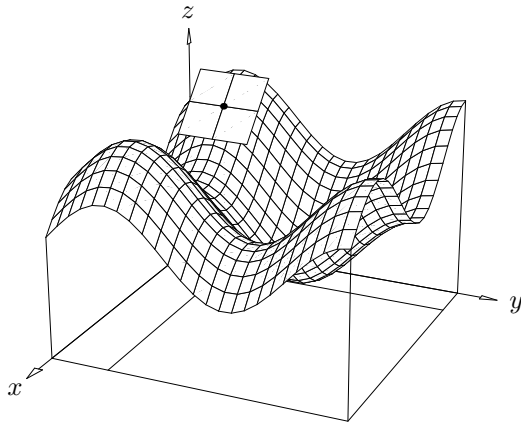


Abb. 8.6 a

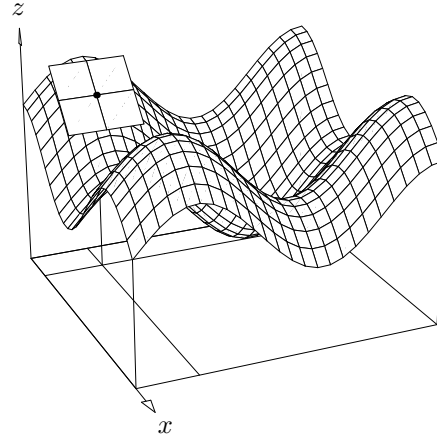


Abb. 8.6 b

In den Abbildungen ist die Funktion $f(x, y) = \cos x + \sin y + 3$ mit dem Definitionsbereich $D := [0, \frac{5}{2}\pi] \times [0, \frac{5}{2}\pi]$ aus zwei verschiedenen Perspektiven dargestellt. Die Tangentialebene wird an der Stelle $(\frac{3}{8}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ betrachtet.