

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Ableitung

Bemerkung. Bei der Definition der Differenzierbarkeit sind wir vom Differenzenquotienten ausgegangen und haben dessen Limes gebildet. Dieses Herangehen funktioniert in \mathbb{R} recht gut, es läßt sich so aber nicht auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen, da z.B. in \mathbb{R}^n eine solche Division nicht erklärt ist. Daher werden wir jetzt eine gleichwertige Definition der Differenzierbarkeit aufstellen, die sich auch auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen läßt. Hierbei wird gleichzeitig das „Wesen der Differenzierbarkeit“ herausgearbeitet.

7/1/9

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Ist f in a differenzierbar, dann existiert bekanntlich der Grenzwert:

$$b := f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

folglich gibt es eine Funktion $r(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $r(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ und

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b + r(x) \implies$$

$$f(x) = f(a) + b \cdot (x - a) + r(x) \cdot (x - a).$$

Damit haben wir folgende Information:

Ist f in a differenzierbar, dann gibt es eine reelle Zahl b und eine Funktion r mit $r(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, so daß sich die Funktion f in einer Umgebung von a darstellen läßt in der Form:

$$f(x) = f(a) + b(x - a) + r(x)(x - a).$$

Offenbar ist $o(x) := r(x)(x - a)$ ebenfalls eine Funktion, so daß

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o(x)}{|x - a|} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)(x - a)}{|x - a|} = \lim_{x \rightarrow a} r(x) = 0.$$

(In diesem Zusammenhang sagen wir auch, daß $o(x)$ mit $x \rightarrow a$ von höherer als erster Ordnung gegen null strebt.)

Umgekehrt gelte nun folgendes:

Die Funktion f sei in einer Umgebung $U(a)$ definiert, und es gebe eine Konstante b und eine Funktion $o(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in U(a)$ gilt:

$$f(x) = f(a) + b(x - a) + o(x), \text{ wobei } \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(x)}{|x - a|} = 0.$$

Für $x \neq a$ gilt dann

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b + r^*(x), \quad \text{wobei} \quad r^*(x) := \frac{o(x)}{x - a}.$$

Offenbar ist

$$\lim_{x \rightarrow a} r^*(x) = 0.$$

Folglich existiert

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b,$$

d.h., f ist an der Stelle a differenzierbar und $f'(a) = b$. Hieraus ergibt sich sofort, daß das nach Voraussetzung existierende b schon eindeutig bestimmt ist.

Bemerkung. Das Wesen dieser Definition besteht darin, daß wir die Funktion f als lineare Funktion $t(x) = f(a) + b(x - a)$ plus einem Rest $o(x)$ dargestellt haben, wobei der Rest für „kleine“ $x - a$ selbst „klein“ wird, dies bedeutet eben $\lim_{x \rightarrow a} \frac{o(x)}{|x - a|} = 0$. Hierfür sagen wir auch:

Die Funktion f läßt sich in $U(a)$ linear approximieren.

Differenzierbarkeit einer Funktion f in a bedeutet also nichts anderes, als f in einer Umgebung $U(a)$ durch eine lineare Funktion hinreichend gut approximieren zu können. Das ist das Wesen der Differenzierbarkeit, und dies läßt sich auch auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen. Davon werden wir im nächsten Kapitel noch Gebrauch machen. (vgl. auch Abb. 7.5)

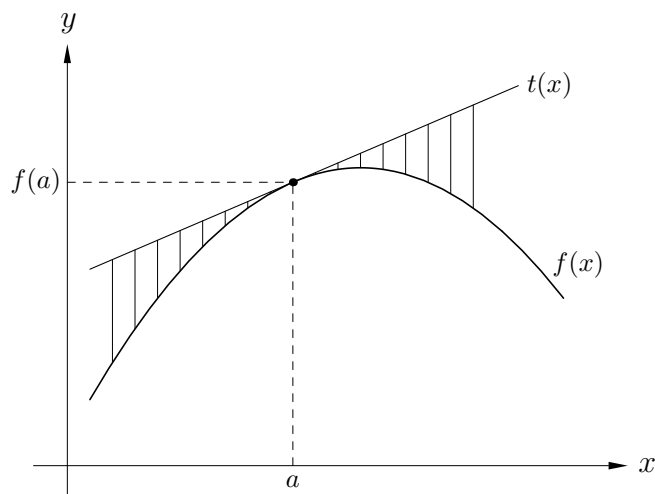


Abb. 7.5 Die Funktion wird in einer hinreichend kleinen Umgebung von a durch die Tangente linear approximiert. Der dabei auftretende Fehler ist durch die dünnen senkrechten Striche symbolisiert.

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

8/1/3

Das Wesen der Differenzierbarkeit besteht auch hier in der linearen Approximierbarkeit einer Funktion f in einer Umgebung $U(\bar{c})$; d.h., f läßt sich in $U(\bar{c})$ darstellen als $f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ plus einem Rest $o(\bar{x})$, der in $U(\bar{c})$ „klein“ ist, wobei hier 'klein' bedeuten soll, daß $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = 0$ ($\in \mathbb{R}^m$).

Durch $\bar{y} = A(\bar{x} - \bar{c})$ wird eine Punktmenge in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ beschrieben.

Die durch $\bar{y} := t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ definierte Punktmenge heißt *Tangentialebene* von f an der Stelle \bar{c} , und $t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ heißt *Gleichung der Tangentialebene*.

Der Punkt $(\bar{c}, f(\bar{c}))$ erfüllt diese Gleichung, d.h., er liegt in der Tangentialebene.

Der Anteil $A(\bar{x} - \bar{c})$ von der Funktion $t(\bar{x})$ heißt *Differential* (oder *1. Differential*) von f in \bar{c} .

Wir werden auf diese Begriffe noch einmal zurückkommen, insbesondere im Zusammenhang mit der Berechnung und Darstellung der Ableitung und damit auch der Tangentialebene und des Differentials.

Um die Analogie bei der Differenzierbarkeit von Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher besser zu veranschaulichen, betrachten wir die folgenden beiden Spezialfälle.

Für $n = m = 1$ (also $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$) definiert $t(x) = f(c) + \underbrace{A}_{:=b}(x - c)$ eine

Gerade in $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, die Tangente von f an der Stelle c .

Für $n = 2, m = 1$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$ wird durch $t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ eine Ebene in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ bestimmt, die offenbar den Punkt $(\bar{c}, f(\bar{c}))$ enthält. In diesem Fall ist der Begriff „*Tangentialebene*“ wörtlich zu nehmen.

Wir haben bereits die Ableitung einer Funktion mit mehreren Veränderlichen definiert, wir haben aber noch kein praktikables Verfahren, um die Ableitung einer konkreten Funktion zu berechnen. Dazu betrachten wir zunächst Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und definieren den Begriff der partiellen Ableitbarkeit.