

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.1 Differenzierbarkeit

In Kapitel 7 wurden zwei äquivalente Definitionen für die Differenzierbarkeit von Funktionen mit einer Veränderlichen angegeben. Wir werden jetzt die zweite der Definitionen, die die lineare Approximation benutzt, für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit mehreren Veränderlichen verallgemeinern. Hierzu machen wir zunächst einen kleinen Exkurs in die lineare Algebra.

8/1/0

Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ Vektorräume mit kanonischer Basis) kann als Matrix aufgefaßt werden:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Elemente $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ sind dann sog. Spaltenvektoren:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

und es ist

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Ist $m = 1$, dann besteht die Matrix A nur aus einer Zeile, die dann als Vektor in \mathbb{R}^n aufgefaßt werden kann. Hierfür wählen wir die Bezeichnung $A := (a_1, \dots, a_n)$.

In diesem Fall schreibt man (der Einfachheit wegen aus drucktechnischen Gründen) die Vektoren $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ als Zeilen: $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Dann ist

$$A\bar{x} = (a_1, \dots, a_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

Ist zusätzlich $n = 1$, also $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dann besteht die Matrix (bzw. der Vektor) A nur aus einer Komponente: $A = (a_1)$. Wendet man A auf einen „Vektor“ $\bar{x} = (x_1)$ aus \mathbb{R} an, so erhält man $A\bar{x} = a_1 x_1$.

Für A bzw. \bar{x} schreiben wir dann einfach a_1 bzw. x_1 .

Diese Bezeichnungsweise ausnutzend liefert die zweite Definition der Differenzierbarkeit aus Kapitel 7, 7/1/10 folgende Formulierung:

f ist in $c \in \mathbb{R}$ differenzierbar \iff
 f ist in einer Umgebung $U(c)$ definiert, und es existiert eine lineare Abbildung
 $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Funktion $o(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{o(x)}{|x - c|} \xrightarrow{x \rightarrow c} 0$, so daß für jedes
 $x \in U(c)$ gilt: $f(x) = f(c) + b \cdot (x - c) + o(x)$.

Diese Formulierung läßt sich sofort auf Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und Elemente $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ erweitern.

Definition. (*Differenzierbarkeit, Ableitung*)

8/1/1

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

f ist in \bar{c} differenzierbar (oder *total differenzierbar*)

$\overline{\text{Def}}$ f ist in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert, und es existiert eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $o(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = \bar{0}, \text{ so daß für jedes } \bar{x} \in U(\bar{c}) \text{ gilt: } f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x}).$$

Die Matrix A heißt dann *1. Ableitung* von f an der Stelle \bar{c} .

$$\text{Bez.: } A := f'(\bar{c}).$$

Als wichtigsten Spezialfall erhält man die Differenzierbarkeit bzw. die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$. A besteht in diesem Falle nur aus einer Zeile. Die Ableitung $f'(\bar{c})$ ist dann ein Vektor (im allgemeinen ist $f'(\bar{c})$ eine Matrix). Dieser Vektor heißt auch *Gradient* von f an der Stelle \bar{c} (oder kurz in \bar{c}).

8/1/2

$$\text{Bez.: } f'(\bar{c}) = \text{grad } f(\bar{c}).$$

Das Wesen der Differenzierbarkeit besteht auch hier in der linearen Approximierbarkeit einer Funktion f in einer Umgebung $U(\bar{c})$; d.h., f läßt sich in $U(\bar{c})$ darstellen als $f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ plus einem Rest $o(\bar{x})$, der in $U(\bar{c})$ „klein“ ist, wobei hier 'klein' bedeuten soll, daß $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} = \bar{0} \quad (\in \mathbb{R}^m)$.

8/1/3

Durch $\bar{y} = A(\bar{x} - \bar{c})$ wird eine Punktmenge in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ beschrieben.

Die durch $\bar{y} := t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ definierte Punktmenge heißt *Tangentialebene* von f an der Stelle \bar{c} , und $t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ heißt *Gleichung der Tangentialebene*.

Der Punkt $(\bar{c}, f(\bar{c}))$ erfüllt diese Gleichung, d.h., er liegt in der Tangentialebene.

Der Anteil $A(\bar{x} - \bar{c})$ von der Funktion $t(\bar{x})$ heißt *Differential* (oder *1. Differential*) von f in \bar{c} .

Wir werden auf diese Begriffe noch einmal zurückkommen, insbesondere im Zusammenhang mit der Berechnung und Darstellung der Ableitung und damit auch der Tangentialebene und des Differentials.

Um die Analogie bei der Differenzierbarkeit von Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher besser zu veranschaulichen, betrachten wir die folgenden beiden Spezialfälle.

Für $n = m = 1$ (also $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$) definiert $t(x) = f(c) + \underbrace{A}_{:=b}(x - c)$ eine

Gerade in $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, die Tangente von f an der Stelle c .

Für $n = 2, m = 1$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$ wird durch $t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c})$ eine Ebene in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ bestimmt, die offenbar den Punkt $(\bar{c}, f(\bar{c}))$ enthält. In diesem Fall ist der Begriff „*Tangentialebene*“ wörtlich zu nehmen.

Wir haben bereits die Ableitung einer Funktion mit mehreren Veränderlichen definiert, wir haben aber noch kein praktikables Verfahren, um die Ableitung einer konkreten Funktion zu berechnen. Dazu betrachten wir zunächst Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und definieren den Begriff der partiellen Ableitbarkeit.

Definition. (*partielle Ableitung*)

8/1/4

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert. f ist in \bar{c} *partiell nach x_i differenzierbar* ($i = 1, \dots, n$)

$\overline{\text{Def}}$ Die Funktion $\varphi(x_i) := f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$ ist (als Funktion der einen Veränderlichen x_i) an der Stelle c_i differenzierbar.

Nach der früheren Differenzierbarkeitsdefinition bedeutet dies, daß die folgenden Limites existieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{\varphi(x_i) - \varphi(c_i)}{x_i - c_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(c_i + h) - \varphi(c_i)}{h}, \quad \text{für } h := x_i - c_i \\ &= \lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{f(c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) - f(\bar{c})}{x_i - c_i}. \end{aligned}$$

Der Limes selbst (falls er existiert) heißt *partielle Ableitung* von f nach x_i an der Stelle \bar{c} (oder kurz: in \bar{c}).

Bez.: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = f_{x_i}(\bar{c}).$

Für $h := x_i - c_i$ und $\bar{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, wobei die Eins in \bar{e}_i an der i -ten Stelle steht, existieren die folgenden Limites: 8/1/5

$$\lim_{x_i \rightarrow c_i} \frac{\varphi(x_i) - \varphi(c_i)}{x_i - c_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{c} + h \cdot \bar{e}_i) - f(\bar{c})}{h}.$$

Beispiel.

8/1/6

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y + 2y$, $\bar{c} = (a, b)$.

Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = (f(x, b))'(a) = (2xb)(a) = 2ab.$$

Allgemein ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) := \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + 2y) = 2xy.$$

Analog erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y + 2y) = x^2 + 2 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{c}) = a^2 + 2.$$

Die Abbildung 8.1 zeigt die geometrische Veranschaulichung der partiellen Ableitungen für eine Funktion mit zwei Veränderlichen.

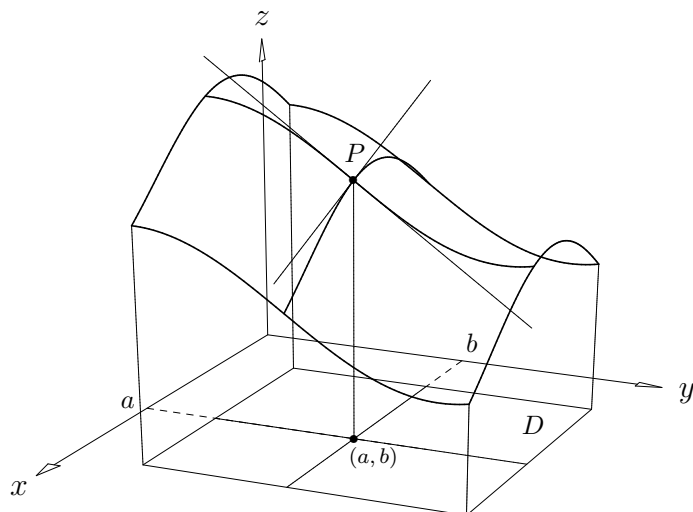


Abb. 8.1 Der Definitionsbereich der hier dargestellten Funktion $f(x, y)$ ist ein Rechteck D .

Schränkt man den Definitionsbereich auf $\{(x, y) \in D : y = b\}$ bzw. auf $\{(x, y) \in D : x = a\}$ ein, dann entstehen Kurven auf der Fläche $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$. Die partiellen Ableitungen f_x und f_y in (a, b) geben die Anstiege der Tangenten an diesen Kurven im Punkt (a, b) in Richtung der x -Achse bzw. der y -Achse an.

Die partielle Ableitung nach x_i gibt also den Anstieg der Tangente in Richtung der Achse x_i an. Wir werden diese Art der Ableitung noch einmal verallgemeinern zur sog. *Richtungsableitung*. Dazu geben wir uns (durch einen geeigneten Vektor) eine beliebige Richtung vor und betrachten den Anstieg der Tangente in diese Richtung, falls die zugrundegelegte Funktion dies zuläßt. Daraus ergibt sich folgende Definition.

Definition. (*Richtungsableitung*)

8/1/7

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ und f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert.

Weiterhin sei $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ und $|\bar{r}| = 1$.

f ist an der Stelle \bar{c} in Richtung \bar{r} differenzierbar

$\overline{\text{Def}}$ Die Funktion $\varphi(h) := f(\bar{c} + h \cdot \bar{r})$ ist (als Funktion der einen Veränderlichen h) an der Stelle 0 differenzierbar;

$$\text{d.h., es existiert } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{c} + h \cdot \bar{r}) - f(\bar{c})}{h}.$$

Der Limes heißt dann *Richtungsableitung* von f an der Stelle \bar{c} in Richtung \bar{r} .

$$\text{Bez.: } \frac{\partial f}{\partial \bar{r}}(\bar{c}) = f_{\bar{r}}(\bar{c}).$$

Bemerkung.

8/1/8

(1) Der Vektor \bar{r} , der die Richtung festlegt, wird stets mit der Länge 1 gewählt, damit

die Richtungsableitung nur von der Richtung und nicht von der Länge des Vektors \bar{r} abhängt.

(2) Wie auch bei Funktionen einer Veränderlichen können Ableitung, partielle Ableitungen und Richtungsableitungen einer Funktion $f(\bar{x})$ in einer Menge $M \subseteq D(f)$ gebildet werden, wenn die entsprechenden Ableitungen in jedem Punkt der Menge existieren. Diese Ableitungen beschreiben neue in M definierte Funktionen, die wir der Reihe nach mit $f', \frac{\partial f}{\partial x_i} := f_{x_i}, \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} := f_{\bar{r}}$ bezeichnen.

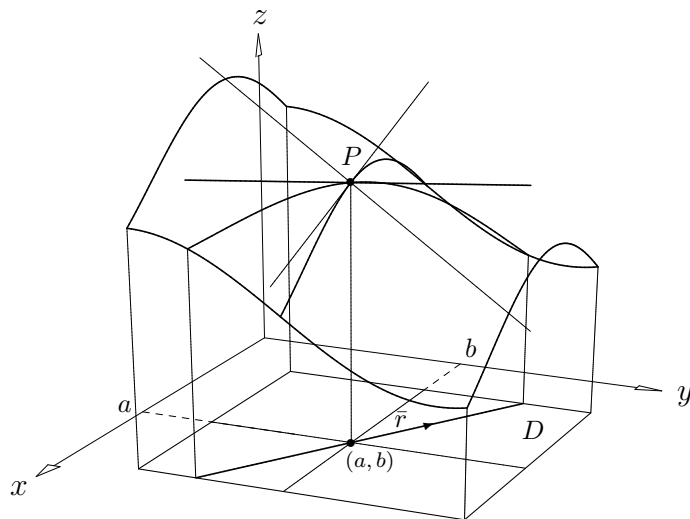


Abb. 8.2 Hier ist die analoge Situation wie in der vorhergehenden Abbildung dargestellt. Es ist zusätzlich eine Richtung durch einen Vektor \bar{r} ausgezeichnet. Schränkt man den Definitionsbereich D auf das im Bild stärker hervorgehobene Geradenstück ein, dann entsteht erneut eine Kurve auf der durch die Funktion gegebenen Fläche. Die Richtungsableitung der Funktion in Richtung \bar{r} gibt den Anstieg der Kurve in dieser Richtung an.

Satz 8.1 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

8/1/9

Ist f in \bar{c} differenzierbar, dann ist f in \bar{c} stetig.

Beweis. Sei f in \bar{c} differenzierbar. Dann existiert eine Umgebung $U(\bar{c})$, so daß für jedes $\bar{x} \in U(\bar{c})$ gilt: $f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = A(\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x})$.

8/1/10

$$\text{g.z.z.: } \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} (f(\bar{x}) - f(\bar{c})) = \bar{0}.$$

$$\text{Offenbar gilt } o(\bar{x}) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \bar{0}.$$

Nach Satz 6.8 ist eine Vektorfunktion stetig, wenn alle ihre Komponenten stetig sind. Dies trifft insbesondere auf $A(\bar{x} - \bar{c})$ zu. Die Komponenten sind aber als lineare Funktionen (nach Satz 6.11) stetig. Folglich gilt auch $A(\bar{x} - \bar{c}) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \bar{0}$.

Hieraus folgt die Behauptung. \square

Bemerkung. Aus der partiellen Differenzierbarkeit nach allen Variablen folgt im allgemeinen noch nicht die Stetigkeit, wie das folgende Beispiel zeigt.

8/1/11

Beispiel.

8/1/12

Es sei $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq \bar{0}, \\ 0, & \text{falls } (x, y) = \bar{0}. \end{cases}$

Dann ist f an der Stelle $(0, 0)$ nach x und y differenzierbar, denn es ist

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) = 0$$

und

$$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \frac{0 - 0}{y} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) = 0.$$

Aber f ist in $\bar{0}$ nicht stetig, denn anderenfalls wäre $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$. Speziell für $x = y$, $x \neq 0$ und $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ gilt dann

$$f(x, y) = f(x, x) = \frac{2x^2}{x^2 + x^2} = 1 \not\rightarrow 0. \quad \text{N!}$$

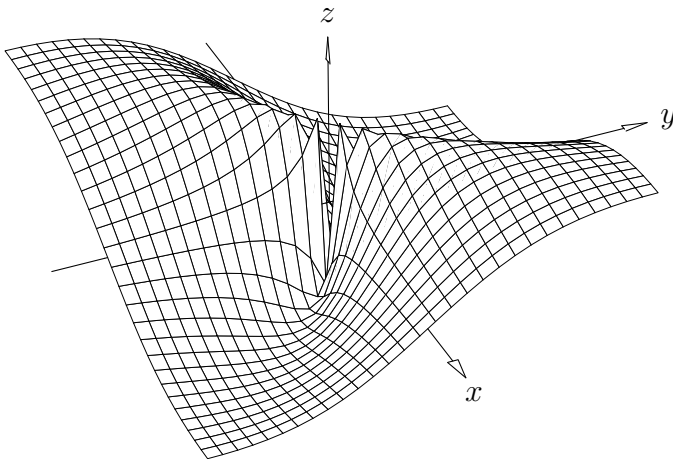


Abb. 8.3 Die Abbildung zeigt die Funktion f aus dem letzten Beispiel. In jeder Umgebung des Nullpunktes nimmt f die Werte ± 1 an, folglich kann die Funktion dort nicht stetig sein. In $(0, 0)$ selbst ist der Anstieg von f in Richtung der x -Achse und der y -Achse jeweils null.

Die nächsten drei Sätze stellen wichtige Beziehungen zwischen partieller und totaler Differenzierbarkeit her. 8/1/13

Satz 8.2 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$. 8/1/14

Ist f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert und nach allen Variablen partiell differenzierbar und sind alle partiellen Ableitungen in \bar{c} stetig, dann ist f in \bar{c} (total) differenzierbar, und für jedes $\bar{x} \in U(\bar{c})$ gilt $f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \cdot (x_i - c_i) + o(\bar{x})$.

(D.h., die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die aufgrund der Differenzierbarkeit existiert, ist gegeben durch $A = (a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{c}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{c}) \right)$ und $A(\bar{x} - \bar{c}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \cdot (x_i - c_i)$.)

Beweis. Wir betrachten hier nur den Spezialfall $n = 3$. Dazu sei $\bar{x} = (x, y, z)$ und $\bar{c} = (a, b, c)$ (den allgemeinen Fall beweist man analog). 8/1/15

Mit Hilfe des 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung (leicht modifiziert) erhält man

$$\begin{aligned}
 f(\bar{x}) - f(\bar{c}) &= f(x, y, z) - f(a, b, c) = \\
 &= f(x, y, z) - f(a, y, z) + f(a, y, z) - f(a, b, z) + f(a, b, z) - f(a, b, c) = \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(\underbrace{a + \vartheta_1(x-a), y, z}_{:= \bar{u}}) \cdot (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\underbrace{a, b + \vartheta_2(y-a), z}_{:= \bar{v}}) \cdot (y-b) + \\
 &= \frac{\partial f}{\partial z}(\underbrace{a, b, c + \vartheta_3(z-c)}_{:= \bar{w}}) \cdot (z-c) = \quad (\text{nach dem 1. Mittelwertsatz}) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{u}) \cdot (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{v}) \cdot (y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{w}) \cdot (z-c) = \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \cdot (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{c}) \cdot (y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{c}) \cdot (z-c) + \\
 &= \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{u}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \right] \cdot (x-a) + \cdots + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{w}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \right] \cdot (z-c)}_{:= r(\bar{x})}.
 \end{aligned}$$

Folglich ist

$$f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \cdot (x-a) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{c}) \cdot (z-c) + r(\bar{x}).$$

Behauptung: $\frac{r(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0$.

Nach Voraussetzung sind die partiellen Ableitungen in \bar{c} stetig, folglich gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jedes \bar{x} mit $|\bar{x} - \bar{c}| < \delta$ gilt:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (\text{im allgemeinen Fall ist der Betrag } < \frac{\varepsilon}{n}).$$

Die obige Abschätzung gilt auch entsprechend für die partiellen Ableitungen nach y und nach z .

Offenbar gilt:

$$|\bar{x} - \bar{c}| < \delta \implies |\bar{u} - \bar{c}|, \dots, |\bar{w} - \bar{c}| < \delta,$$

denn $0 < \vartheta_i < 1$ für alle i .

Folglich ist erst recht

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{u}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad \text{analog für } \bar{v} \text{ und } \bar{w}.$$

Damit ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
|r(\bar{x})| &\leq \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{u}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{c}) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \cdot \underbrace{|x - a|}_{\leq |\bar{x} - \bar{c}|} + \cdots + \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{w}) - \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{c}) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \cdot \underbrace{|z - c|}_{\leq |\bar{x} - \bar{c}|} \\
&\leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} \cdot |\bar{x} - \bar{c}| = \varepsilon \cdot |\bar{x} - \bar{c}|.
\end{aligned}$$

Also

$$\frac{|r(\bar{x})|}{|\bar{x} - \bar{c}|} \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 < |\bar{x} - \bar{c}| < \delta.$$

Hieraus folgt die Behauptung. \square

Bemerkung. Ist f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert und nach allen Variablen partiell differenzierbar und sind alle partiellen Ableitungen in \bar{c} stetig, dann läßt sich $f(\bar{x})$ in $U(\bar{c})$ durch die Funktion 8/1/16

$$t(\bar{x}) := f(\bar{c}) + \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c})}_{:= a_i \in \mathbf{R}} \cdot (x_i - c_i)$$

linear approximieren. Es gilt also $f(\bar{x}) = t(\bar{x}) + o(\bar{x})$.

Satz 8.3 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

8/1/17

Ist f in \bar{c} differenzierbar (d.h., es gibt reelle Zahlen a_1, \dots, a_n , so daß

$$f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + \sum_{i=1}^n a_i(x_i - c_i) + o(\bar{x}) \quad \text{für alle } \bar{x} \text{ in einer Umgebung } U(\bar{c}),$$

dann existieren alle partiellen Ableitungen von f in \bar{c} , und es ist $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c})$.

(Die Ableitung $f'(\bar{c}) := (a_1, \dots, a_n)$ ist also durch die partiellen Ableitungen eindeutig bestimmt.)

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

8/1/18

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \sum_{i=1}^n a_i(x_i - c_i) + o(\bar{x})$$

auch speziell für

$$\bar{x} = (c_1, \dots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \dots, c_n) = \bar{c} + h\bar{e}_i \quad \text{mit} \quad h = x_i - c_i.$$

Folglich ist

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = f(\bar{c} + h\bar{e}_i) - f(\bar{c}) = a_i \cdot h + o(\bar{x}) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{f(\bar{c} + h\bar{e}_i) - f(\bar{c})}{h} = a_i + \underbrace{\frac{o(\bar{x})}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0}.$$

Damit existiert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{c} + h\bar{e}_i) - f(\bar{c})}{h} = a_i. \quad \square$$

Satz 8.4 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

8/1/19

Ist f in \bar{c} differenzierbar (d.h., es gibt eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, also eine $(m \times n)$ -Matrix $A = (a_{ji})_{\substack{j=1, \dots, m \\ i=1, \dots, n}}$, so daß $f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + A(\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x})$ für alle \bar{x} in einer Umgebung $U(\bar{c})$,

dann existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, und es ist $a_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$.

(Die Abbildung A ist also eindeutig bestimmt durch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{c})$.)

Beweis. Den Beweis führt man analog wie zum Satz 8.2. \square

8/1/20

Bemerkung. Die Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, also die 1. Ableitung der Vektorfunktion f , heißt auch *Funktionalmatrix* oder *Jacobimatrix* von f in \bar{c} .

8/1/21

$$\text{Bez.: } f'(\bar{c}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{c}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{c}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{c}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{c}) \end{pmatrix} := \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\bar{c}).$$

Ist $m = 1$, dann besteht die Matrix $A = f'(\bar{c}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{c}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{c}) \right)$ nur aus einer Zeile. In diesem Falle hat die 1. Ableitung oder der Gradient von f die Gestalt

8/1/22

$$f'(\bar{c}) = \text{grad } f(\bar{c}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(\bar{c}).$$

Ist f in einer ganzen Umgebung $U(\bar{c})$ differenzierbar, dann ist durch $\bar{a} \mapsto f'(\bar{a})$ für jedes $\bar{a} \in U(\bar{c})$ eine Funktion f' definiert. Diese Funktion bezeichnen wir mit

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)};$$

$$\text{für } m = 1 \text{ ist } f' = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \text{grad } f.$$

Für das Differential von f an der Stelle \bar{c} schreiben wir auch $df(\bar{x}, \bar{c})$ oder kurz $df(\bar{x})$. Mit dieser Bezeichnung läßt sich die Tangentialebene folgendermaßen darstellen:

$$t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + df(\bar{x}, \bar{c}).$$

Wir werden jetzt noch gewisse Techniken im Umgang mit Differentialen entwickeln, die für manche Anwendungen sehr hilfreich sind. Dazu betrachten wir zunächst den

eindimensionalen Fall $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f'(c) = \frac{df}{dx}(c) = \frac{dy}{dx}(c)$ für $y = f(x)$.

$\frac{dy}{dx}(c)$ gibt den Anstieg der Tangente von f in c an. Faßt man die Zahl $f'(c)$ als Bruch $\frac{dy}{dx}$ auf, dann erhält man $dy = f'(c)dx$ (dy hängt hierbei natürlich von c ab). Läßt man in der „Verhältniszahl“ $f'(c) = \frac{dy}{dx}$ den „Nenner“ dx konstant, dann verändert sich mit c nur noch dy , d.h., dy ist dann eine Funktion von c . (vgl. Abb. 8.4)

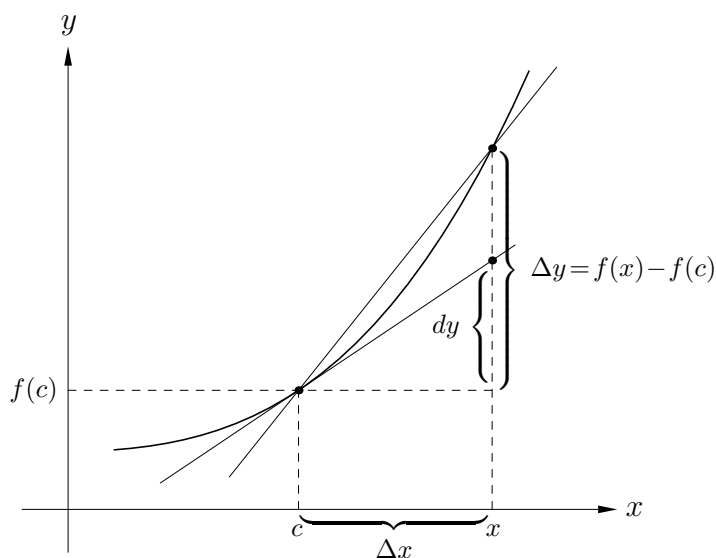


Abb. 8.4 Setzt man $\Delta x := dx$ und läßt dx konstant, dann ist dy nur noch von c abhängig.

Sei jetzt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Manchmal schreibt man für $x_i - c_i$ auch dx_i und damit

$$\bar{x} - \bar{c} = (x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n) = (dx_1, \dots, dx_n) := d\bar{x}.$$

Folglich erhält man

$$df(\bar{x}, \bar{c}) = f'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}) = f'(\bar{c}) \cdot d\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \cdot dx_i.$$

Betrachtet man die dx_i als Konstante, dann hängt $df(\bar{x}, \bar{c})$ nur von \bar{c} ab. Damit ist das Differential für die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wieder eine Abbildung aus \mathbb{R}^n in \mathbb{R} , $df(\bar{c}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Die Ableitung $f'(\bar{c})$ (mit veränderlichem \bar{c}) ist hingegen eine Vektorfunktion $f'(\bar{c}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(\bar{c}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Ableitung von f' (falls sie existiert) ist dann schon eine Matrix (Funktionalmatrix) usw. Die „Dimension“ der Ableitung wird also größer, die des Differentials nicht. Dies ist ein Vorteil, wenn man mit höheren Ableitungen bzw. Differentialen umgehen will.

Wir betrachten jetzt ein einfaches Beispiel für die Berechnung der Tangentialebene.

Beispiel.

8/1/23

Es sei $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Gesucht ist die Gleichung der Tangentialebene von f an der Stelle $\bar{c} = (1, 1)$.

(vgl. Abb. 8.5; ein weiteres Beispiel für die Darstellung einer Funktion und der Tangentialebene an einer Stelle ist in den Abb. 8.6 a und 8.6 b gegeben.)

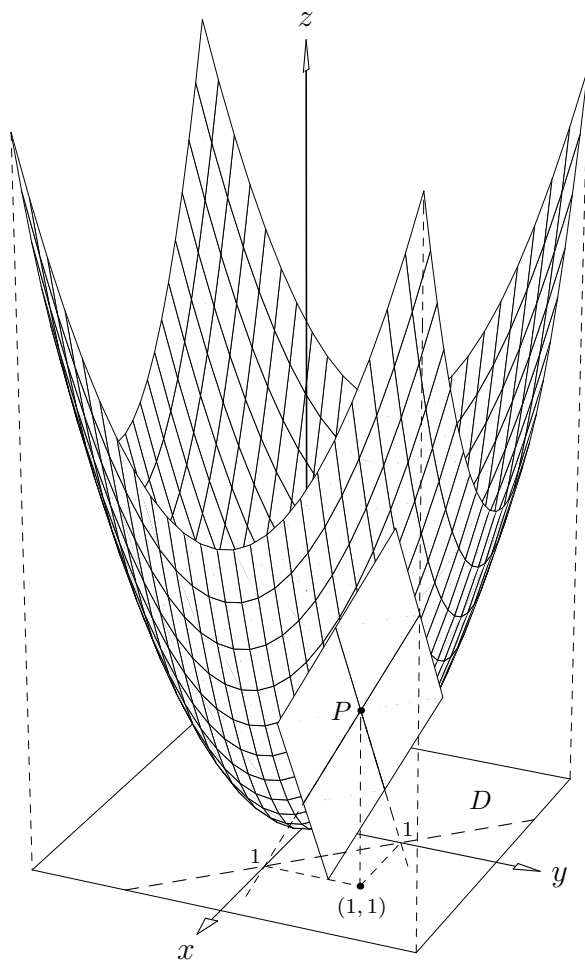


Abb. 8.5 Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ mit dem Definitionsbereich $D := [-2, 2] \times [-2, 2]$ und der Tangentialebene an der Stelle $(1, 1)$ bzw. im Punkt $P := (1, 1, 2)$. Das „Kreuz“ in der Tangentialebene entsteht durch die Tangenten an den entsprechenden Kurven im Punkt P in Richtung der Achsen. Die dicker gestrichelte Linie symbolisiert den Schnitt der Tangentialebene mit der durch D gegebenen Ebene.

Es ist

$$f(1, 1) = 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} z = t(x, y) &= f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \cdot (x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \cdot (y - 1) \\ &= 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1). \end{aligned}$$

Die Ebene geht durch die drei Punkte $(1, 1, 2), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$, wodurch die Ebene schon eindeutig bestimmt ist.

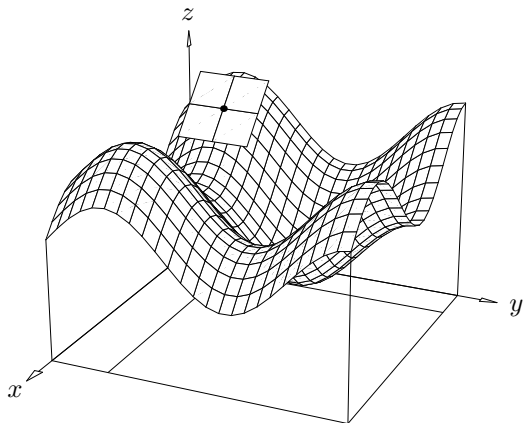


Abb. 8.6 a

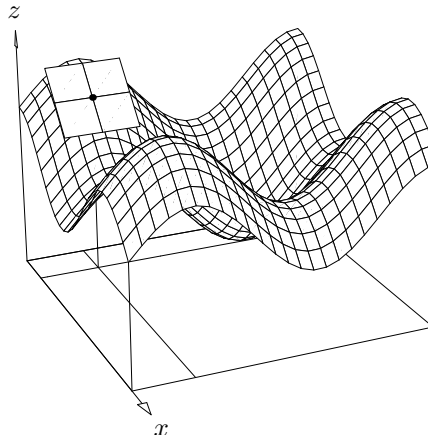


Abb. 8.6 b

In den Abbildungen ist die Funktion $f(x, y) = \cos x + \sin y + 3$ mit dem Definitionsbereich $D := [0, \frac{5}{2}\pi] \times [0, \frac{5}{2}\pi]$ aus zwei verschiedenen Perspektiven dargestellt. Die Tangentialebene wird an der Stelle $(\frac{3}{8}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ betrachtet.

In dem folgenden Satz wird nachgewiesen, daß man aus der totalen Differenzierbarkeit die Richtungsableitbarkeit erhält und daß sich die Richtungsableitung mit Hilfe der partiellen Ableitungen berechnen läßt.

8/1/24

Satz 8.5 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

8/1/25

Ist f in \bar{c} differenzierbar, dann ist f an der Stelle \bar{c} in jede Richtung \bar{r} (mit $|\bar{r}| = 1$) differenzierbar, und es ist $f_{\bar{r}}(\bar{c}) = f'(\bar{c}) \cdot \bar{r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \cdot r_i$, wobei $\bar{r} = (r_1, \dots, r_n)$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt für alle \bar{x} aus einer Umgebung $U(\bar{c})$:

8/1/26

$$f(\bar{x}) = f(\bar{c}) + f'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o(\bar{x} - \bar{c})$$

Speziell für $\bar{x} := \bar{c} + h\bar{r} \in U(\bar{c})$ erhält man dann

$$f(\bar{c} + h\bar{r}) - f(\bar{c}) = f'(\bar{c}) \cdot \underbrace{(\bar{c} + h\bar{r} - \bar{c})}_{h\bar{r}} + o(h\bar{r})$$

und schließlich

$$\frac{f(\bar{c} + h\bar{r}) - f(\bar{c})}{h} = f'(\bar{c}) \cdot \bar{r} + \underbrace{\frac{o(\bar{x})}{h}}_{\rightarrow 0}.$$

Folglich ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{c} + h\bar{r}) - f(\bar{c})}{h} = f'(\bar{c}) \cdot \bar{r}.$$

Andererseits ist dieser Limes gleich $f'_{\bar{r}}(\bar{c})$. Hieraus folgt die Behauptung. \square

Wir befassen uns jetzt mit der Differenzierbarkeit zusammengesetzter Funktionen. Da sich die Ableitung einer Vektorfunktion auf die Ableitung ihrer reellwertigen Komponenten zurückführen läßt, werden wir uns im folgenden vorwiegend mit reellwertigen Funktionen befassen. 8/1/27

Satz 8.6 (*Differentiation rationaler Funktionen*) 8/1/28

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und f, g in \bar{c} differenzierbar. Dann gilt:

- (1) $f \pm g$ und $f \cdot g$ sind in \bar{c} differenzierbar, und es ist
$$(f \pm g)'(\bar{c}) = f'(\bar{c}) \pm g'(\bar{c}) \quad \left(\implies d(f \pm g) = df \pm dg \right),$$

$$(f \cdot g)'(\bar{c}) = f'(\bar{c}) \cdot g(\bar{c}) + f(\bar{c}) \cdot g'(\bar{c}) \quad \left(\implies d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg \right).$$
- (2) Ist $g(\bar{x}) \neq 0$ für jedes \bar{x} in einer Umgebung $U(\bar{c})$, dann ist $\frac{f}{g}$ in \bar{c} differenzierbar, und es ist
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\bar{c}) = \frac{f'(\bar{c}) \cdot g(\bar{c}) - f(\bar{c}) \cdot g'(\bar{c})}{g^2(\bar{c})} \quad \left(\implies d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2} \right).$$

Beweis. Den Beweis führt man ähnlich wie für Funktionen einer reellen Veränderlichen; man hat hier lediglich alle Beweisschritte für die partiellen Ableitungen vorzunehmen. 8/1/29
 \square

Satz 8.7 (*Spezialfall für die Kettenregel*) 8/1/30

Es sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (also $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$).

Ist g in \bar{c} und f in $g(\bar{c})$ differenzierbar, dann ist $f \circ g$ in \bar{c} differenzierbar, und es ist $(f \circ g)'(\bar{c}) = f'(g(\bar{c})) \cdot g'(\bar{c})$.

Beweis. Sei $b = g(\bar{c})$. Nach Voraussetzung ist g in \bar{c} und f in $b = g(\bar{c})$ differenzierbar. Damit gilt: 8/1/31

$$g(\bar{x}) - g(\bar{c}) = g'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o_1(\bar{x})$$

für alle \bar{x} in einer Umgebung $U(\bar{c})$ und $\frac{o_1(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0$, und es ist

$$f(y) - f(b) = f'(b) \cdot (y - b) + o_2(y)$$

für alle y in einer Umgebung $U(b)$ und $\frac{o_2(y)}{|y - b|} \xrightarrow{y \rightarrow b} 0$.

Da g in \bar{c} differenzierbar, also dort auch stetig ist, gilt für $\bar{x} \rightarrow \bar{c}$ auch $g(\bar{x}) \rightarrow g(\bar{c})$. Nach Voraussetzung strebt $o_2(y)$ für $y \rightarrow b$ von höherer als 1. Ordnung gegen null, d.h., es gibt eine Funktion $r(y)$, so daß $o_2(y) = r(y) \cdot (y - b)$ und $r(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} 0$.

Wir wählen jetzt $y := g(\bar{x})$. Damit erhält man insgesamt

$$\begin{aligned} (f \circ g)(\bar{x}) - (f \circ g)(\bar{c}) &= \underbrace{f(g(\bar{x}))}_{=y} - \underbrace{f(g(\bar{c}))}_{=b} = \\ &= f'(g(\bar{c})) \cdot (g(\bar{x}) - g(\bar{c})) + o_2(g(\bar{x})) = \\ &= f'(g(\bar{c})) \cdot \left(g'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o_1(x) \right) + o_2(g(\bar{x})) = \\ &= f'(g(\bar{c})) \cdot g'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + \underbrace{f'(g(\bar{x})) \cdot o_1(x) + o_2(g(\bar{x}))}_{:=o(\bar{x})}. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß

$$\frac{o(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0.$$

$f'(g(\bar{c}))$ ist konstant, folglich gilt $f'(g(\bar{c})) \cdot \frac{o_1(\bar{x})}{|\bar{x} - \bar{c}|} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0$.

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \frac{|o_2(g(\bar{x}))|}{|\bar{x} - \bar{c}|} &= \frac{|r(g(\bar{x})) \cdot (g(\bar{x}) - g(\bar{c}))|}{|\bar{x} - \bar{c}|} \\ &= |r(g(\bar{x}))| \cdot \frac{|g(\bar{x}) - g(\bar{c})|}{|\bar{x} - \bar{c}|} = |r(g(\bar{x}))| \cdot \frac{|g'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}) + o_1(\bar{x})|}{|\bar{x} - \bar{c}|} \\ &\leq |r(g(\bar{x}))| \cdot \left(\frac{|g'(\bar{c})| \cdot |\bar{x} - \bar{c}|}{|\bar{x} - \bar{c}|} + \frac{|o_1(\bar{x})|}{|\bar{x} - \bar{c}|} \right) \\ &= \underbrace{|r(g(\bar{x}))|}_{\xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0} \cdot \left(\underbrace{|g'(\bar{c})|}_{\text{konstant}} + \underbrace{\frac{|o_1(\bar{x})|}{|\bar{x} - \bar{c}|}}_{\xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0} \right) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 0. \end{aligned}$$

Damit ist $f \circ g$ in $U(\bar{c})$ durch

$$t(\bar{x}) := (f \circ g)(\bar{c}) + \left(\underbrace{f'(g(\bar{c}))}_{\in \mathbf{R}} \cdot \underbrace{g'(\bar{c})}_{\in \mathbf{R}^n} \right) \cdot (\bar{x} - \bar{c})$$

linear approximiert, folglich ist

$$(f \circ g)'(\bar{c}) = f'(g(\bar{c})) \cdot g'(\bar{c}). \quad \square$$

Satz 8.8 (Kettenregel)

8/1/32

Es sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ (also $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$).

Ist g in \bar{c} und f in $g(\bar{c})$ differenzierbar, dann ist $f \circ g$ in \bar{c} differenzierbar, und es ist $(f \circ g)'(\bar{c}) = f'(g(\bar{c})) \cdot g'(\bar{c})$.

(Das Produkt der „inneren“ und der „äußeren“ Ableitung ist ein Produkt von Matrizen.)

Beweis. Die grundlegende Beweisidee ist die gleiche wie im vorhergehenden Satz. Da der technische Aufwand jedoch wesentlich größer ist, kann hier nur auf die Literatur verwiesen werden. (vgl. z.B. Literaturangabe [4], Teil II, Seite 217) \square

8/1/33

Bemerkung. Für $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ stellt sich die Ableitung von $(f \circ g)$ an der Stelle \bar{c} wie folgt dar, wobei $\bar{b} = g(\bar{c})$ ist:

8/1/34

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(\bar{c}) &= f'(g(\bar{c})) \cdot g'(\bar{c}) = f'(\bar{b}) \cdot g'(\bar{c}) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(\bar{b}) \cdot \frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\bar{c}) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\bar{b}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\bar{b}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial y_1}(\bar{b}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial y_m}(\bar{b}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{c}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar{c}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\bar{c}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\bar{c}) \end{pmatrix} \\ &= (a_{ji})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, k}} \quad \text{und} \quad a_{ji} = \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial y_\nu}(\bar{b}) \cdot \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i}(\bar{c}). \end{aligned}$$

Beispiele.

(1) Spezialfall einer Verkettung

8/1/35/1

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, also $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $g := (g_1, g_2)$.

Speziell sei $g_1(t) := t$, $g_2(t) := t^2$, also $g(t) = (g_1(t), g_2(t)) = (t, t^2) \in \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) := \sin(x \cdot y)$.

Für $x = g_1(t)$ und $y = g_2(t)$ erhält man

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t)) = \sin(t \cdot t^2) = \sin t^3.$$

Offenbar ist $f \circ g$ eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen, folglich läßt sich die Ableitung nach den Regeln für Funktionen einer Veränderlichen bilden:

$$(f \circ g)'(t) = (\cos t^3) \cdot 3t^2.$$

Wir werden jetzt die Ableitung nach den Regeln für Funktionen mehrerer Veränderlicher berechnen; es wird sich zeigen, daß das gleiche Ergebnis entsteht.

Es ist

$$f'(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right),$$

$$g'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial g_2}{\partial t}(t) \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial g_2}{\partial t}(t) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial t}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial t}(t) := (\star).$$

Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(xy) \cdot y \implies \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) = \cos(g_1(t) \cdot g_2(t)) \cdot g_2(t) = (\cos t^3) \cdot t^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(xy) \cdot x \implies \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) = \cos(g_1(t) \cdot g_2(t)) \cdot g_1(t) = (\cos t^3) \cdot t,$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial t}(t) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g_2}{\partial t}(t) = 2t.$$

Dann ist

$$(f \circ g)'(t) = (\star) = (\cos t^3) \cdot t^2 \cdot 1 + (\cos t^3) \cdot t \cdot 2t = (\cos t^3) \cdot 3t^2.$$

(2) Transformation in Polarkoordinaten

8/1/35/2

Bei der Lösung mathematischer Probleme, insbesondere in der Physik, der Technik und den Naturwissenschaften überhaupt, ist es oft vorteilhaft, die zu behandelnden Probleme mit Hilfe besonders geeigneter Koordinatensysteme zu beschreiben oder vom kartesischen Koordinatensystem zu einem anderen überzugehen. Da dieser Übergang häufig mit der Verkettung von Funktionen und die Lösung der anstehenden Probleme oft mit der Differenzierbarkeit der Verkettung verbunden ist, wollen wir hier einige wichtige nicht-kartesische Koordinatensysteme behandeln. Zunächst betrachten wir die sog. *Polarkoordinaten*, die schon bei der Behandlung der trigonometrischen Funktionen in Kapitel 5 (vgl. Abb. 5.21) eine gewisse Rolle spielten.

Es sei $P = (a, b) \neq (0, 0)$ ein Punkt in der euklidischen Ebene, die mit einem kartesischen Koordinatensystem versehen ist, dessen Achsen mit x bzw. y bezeichnet werden. Offenbar läßt sich der Punkt (a, b) auch eindeutig durch das Paar (r, φ) beschreiben,

wobei r der Abstand von (a, b) zum Nullpunkt ist und φ den Winkel zwischen der x -Achse und der Verbindungsstrecke von $(0, 0)$ nach (a, b) angibt (φ in Bogenmaß gemessen). Damit ist der gleiche Punkt P in der Ebene \mathbb{R}^2 durch unterschiedliche Koordinatensysteme eindeutig beschrieben worden (vgl. Abb. 8.7).

a, b sind die kartesischen Koordinaten von P , und r, φ heißen *Polarkoordinaten*.

(Der Nullpunkt ist mit Hilfe der Polarkoordinaten nicht eindeutig darstellbar, da der Winkel φ hierfür beliebig sein könnte.)

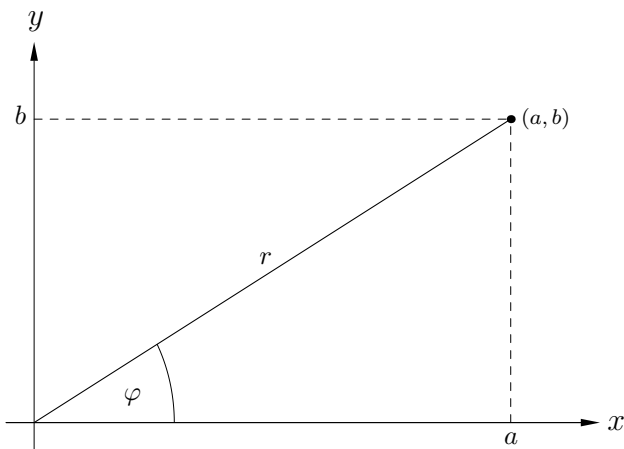


Abb. 8.7 Der Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist mit Hilfe von Polarkoordinaten dargestellt. r bezeichnet den Abstand zwischen $(0, 0)$ und (a, b) .

Nach Voraussetzung gilt also

$$a = r \cdot \cos \varphi := g_1(r, \varphi)$$

und

$$b = r \cdot \sin \varphi := g_2(r, \varphi).$$

Betrachtet man den Punkt P als variabel, $(a, b) := (x, y)$, dann erhält man eine Abbildung

$$g(r, \varphi) := (g_1(r, \varphi), g_2(r, \varphi)) = (x, y),$$

also

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad \text{und} \quad 0 \leq r < \infty.$$

Wir betrachten jetzt ein Beispiel einer Funktion in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $f(x, y) = x^2 + y^2$, wobei der Definitionsbereich von f ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(0, 0)$ und dem Radius R sein soll, also $D(f) := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Wir stellen jetzt f in Polarkoordinaten dar. Für

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

und

$$x = r \cdot \cos \varphi := g_1(r, \varphi), \quad y = r \cdot \sin \varphi := g_2(r, \varphi)$$

ist

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(g_1(r, \varphi), g_2(r, \varphi)) = \left(g_1(r, \varphi)\right)^2 + \left(g_2(r, \varphi)\right)^2 = \\ &= r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} = r^2. \end{aligned}$$

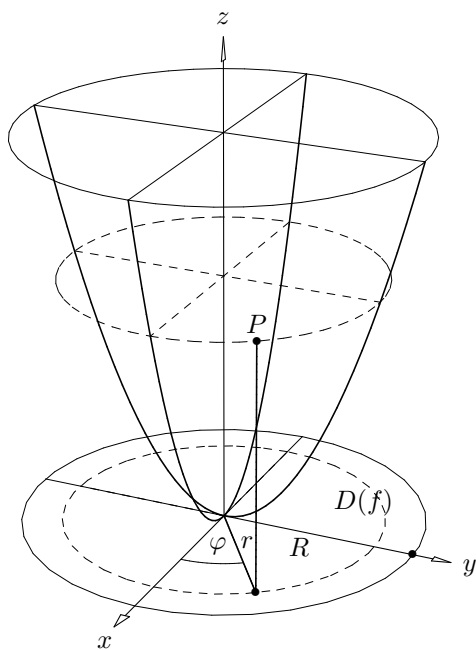


Abb. 8.8 a

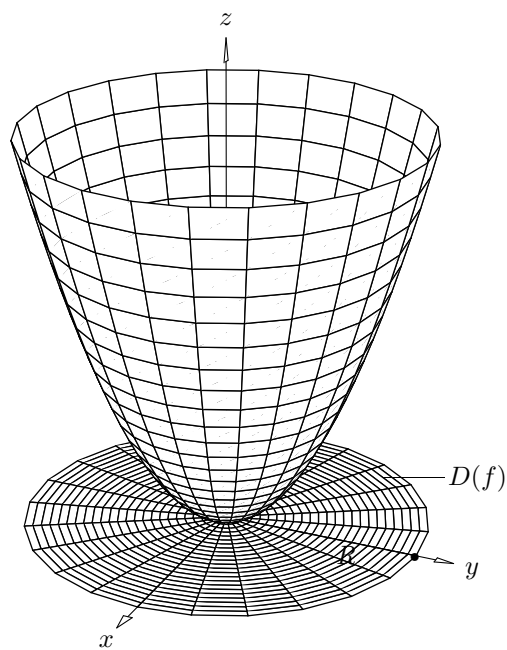


Abb. 8.8 b

In der Abb. 8.8 a ist der Punkt $P = (x, y, f(x, y))$ mit Hilfe von Polarkoordinaten dargestellt. In diesem Koordinatensystem ist P durch (r, φ, r^2) gegeben.

Abb. 8.8 b verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Definitionsbereich und Graph der Funktion $z = f(x, y)$ in Polarkoordinaten. In beiden Fällen wurde als Definitionsbereich ein Kreis mit dem Radius R gewählt.

Man vergleiche auch Abb. 8.5, in der dieselbe Funktion dargestellt wird, wobei jedoch der Definitionsbereich ein Rechteck ist.

Insgesamt haben wir

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \implies f \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Also

$$(f \circ g)(r, \varphi) = f(g(r, \varphi)) = f(g_1(r, \varphi), g_2(r, \varphi)) = r^2.$$

Die Ableitung der verketteten Funktion ergibt sich wie folgt:

$$(f \circ g)'(r, \varphi) = f'(g(r, \varphi)) \cdot g'(r, \varphi),$$

$$f'(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = (2x, 2y),$$

$$g'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} (r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Folglich gilt

$$(f \circ g)'(r, \varphi) = f'(g(r, \varphi)) \cdot g'(r, \varphi) =$$

$$(2r \cos \varphi, 2r \sin \varphi) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} =$$

$$(2r \cos \varphi \cdot \cos \varphi + 2r \sin \varphi \cdot \sin \varphi, -2r \sin \varphi \cdot r \sin \varphi + 2r \sin \varphi \cdot r \cos \varphi) =$$

$$(2r, 0).$$

Wir berechnen jetzt die Determinante der Funktionalmatrix von $g(r, \varphi)$.

$$\det \left(\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(r, \varphi)}(r, \varphi) \right) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Bemerkung. (ohne Beweis)

8/1/35/3

Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$, $g(\bar{x}) = g(x_1, \dots, x_n)$, und $g := (g_1, \dots, g_n)$.

Ist die Determinante der Funktionalmatrix von g in einer Umgebung $U(\bar{c})$ von null verschieden, also

$$\det \left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\bar{x}) \right) \neq 0 \quad \text{für alle } \bar{x} \in U(\bar{c}),$$

dann besitzt g in $U(\bar{c})$ eine Umkehrfunktion.

Speziell für unsere Transformationsfunktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt dann

$$\det \left(\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(r, \varphi)}(r, \varphi) \right) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r \neq 0.$$

Die Koordinatentransformation ist demnach außer im Punkt $(0, 0)$ injektiv.

(3) Transformation in Zylinderkoordinaten

8/1/35/4

Analog wie im Beispiel (2) werden jetzt räumliche Koordinaten transformiert.

Dazu sei $P = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ ein Punkt im Raum \mathbb{R}^3 , der mit einem kartesischen

Koordinatensystem versehen ist, dessen Achsen mit x , y bzw. z bezeichnet werden. Dann ist der Punkt (a, b, c) eindeutig durch das Tripel (r, φ, c) darstellbar, wobei r und φ die Polarkoordinaten des Punktes (a, b) in der Ebene \mathbb{R}^2 sind und c bei der Transformation unverändert bleibt.

Damit ist der gleiche Punkt P im Raum \mathbb{R}^3 durch unterschiedliche Koordinatensysteme eindeutig beschrieben worden (vgl. Abb. 8.9).

Die neuen Koordinaten heißen *Zylinderkoordinaten*.

(Der Nullpunkt ist analog wie im vorhergehenden Beispiel mit Hilfe der Zylinderkoordinaten nicht eindeutig darstellbar.)

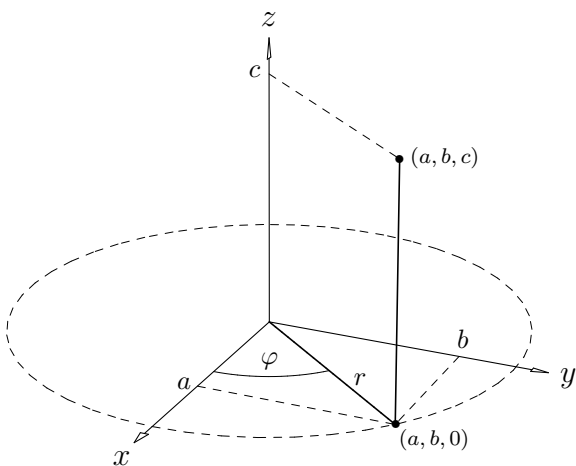


Abb. 8.9 Der Punkt $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ist mit Hilfe von Zylinderkoordinaten dargestellt. r bezeichnet den Abstand zwischen $\bar{0} := (0, 0, 0)$ und $(a, b, 0)$.

Der Punkt (a, b, c) besitzt die Zylinderkoordinaten (r, φ, c) , wobei (r, φ) die Polarkoordinaten von (a, b) sind und c unverändert bleibt.

Es gilt also

$$a = r \cdot \cos \varphi := g_1(r, \varphi, z),$$

$$b = r \cdot \sin \varphi := g_2(r, \varphi, z),$$

$$c = c.$$

Betrachtet man den Punkt P als variabel, $(a, b, c) := (x, y, z)$, dann erhält man eine Abbildung

$$g(r, \varphi, z) := (g_1(r, \varphi, z), g_2(r, \varphi, z), g_3(r, \varphi, z)) = (x, y, z),$$

also

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq r < \infty \quad \text{und} \quad z \in \mathbb{R}.$$

Die Ableitung der Funktion g ergibt sich wie folgt:

$$g'(r, \varphi, z) = \frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(r, \varphi, z)}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\det \left(\frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(r, \varphi, z)}(r, \varphi, z) \right) = r.$$

Für $r \neq 0$ ist die Transformation injektiv.

(4) Transformation in Kugelkoordinaten (oder sphärische Koordinaten)

8/1/35/5

Wir transformieren hierbei wieder räumliche Koordinaten.

Dazu sei $P = (a, b, c) \neq (0, 0, 0) := \bar{0}$ ein Punkt in dem Raum \mathbb{R}^3 , der mit dem kartesischen Koordinatensystem aus Beispiel (3) versehen ist.

Der Punkt (a, b, c) wird erneut durch ein Koordinatentripel (r, φ, ϑ) beschrieben, deren Bedeutung aus der Abbildung 8.10 hervorgeht.

r gibt den Abstand zwischen $\bar{0}$ und P an.

$P' := (a, b, 0)$ ist die Projektion von P auf die (x, y) -Ebene, und φ bezeichnet den Winkel, der durch die x -Achse und die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $\bar{0}$ und P' aufgespannt wird.

Offenbar ist dann

$$c = r \sin \vartheta \quad \text{und} \quad r' = r \cos \vartheta, \quad \text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Folglich ist

$$a = r' \cdot \cos \varphi = r \cos \varphi \cos \vartheta := g_1(r, \varphi, \vartheta),$$

$$b = r' \cdot \sin \varphi = r \sin \varphi \cos \vartheta := g_2(r, \varphi, \vartheta),$$

$$c = r \sin \vartheta := g_3(r, \varphi, \vartheta).$$

Die neuen Koordinaten r, φ, ϑ heißen *Kugelkoordinaten* oder auch *sphärische Koordinaten*.

(Die Punkte auf der z -Achse sind analog wie im vorhergehenden Beispiel mit Hilfe der Kugelkoordinaten nicht eindeutig darstellbar.)

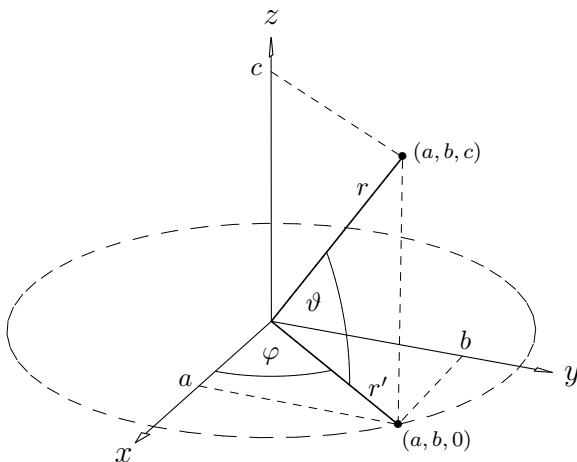


Abb. 8.10 Der Punkt $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ist mit Hilfe von Kugelkoordinaten dargestellt. r' und r bezeichnen die Abstände von $\bar{0} := (0, 0, 0)$ und $(a, b, 0)$ bzw. von $\bar{0}$ und (a, b, c) .

ϑ ist der Winkel zwischen der (x, y) -Ebene und der durch die Punkte $\bar{0}$ und (a, b, c) verlaufenden Geraden.

Der Punkt (a, b, c) besitzt die Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) .

Betrachtet man den Punkt P als variabel, $(a, b, c) := (x, y, z)$, dann erhält man eine Abbildung

$$g(r, \varphi, \vartheta) := (g_1(r, \varphi, \vartheta), g_2(r, \varphi, \vartheta), g_3(r, \varphi, \vartheta)) = (x, y, z),$$

also

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq r < \infty \quad \text{und} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Die Ableitung der Funktion g ergibt sich wie folgt:

$$g'(r, \varphi, \vartheta) = \frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)}(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_1}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_2}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial g_3}{\partial r} & \frac{\partial g_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_3}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} (r, \varphi, \vartheta) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \vartheta & -r \sin \varphi \cdot \cos \vartheta & -r \cos \varphi \cdot \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cdot \cos \vartheta & r \cos \varphi \cdot \cos \vartheta & -r \sin \varphi \cdot \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & r \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\det \left(\frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)}(r, \varphi, \vartheta) \right) = r^2 \cos \vartheta,$$

also

$$\det \left(\frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)}(r, \varphi, \vartheta) \right) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r \neq 0 \quad \text{und} \quad \vartheta \neq \pm \frac{\pi}{2}.$$

Für alle Punkte, die nicht auf der z -Achse liegen, ist die Transformation injektiv.