

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.2 Partielle Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung

Bemerkung.

8/2/4

Ist $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ und existieren in einer Umgebung $U(\bar{c})$ die partiellen Ableitungen f_{x_i} , f_{x_j} und $f_{x_i x_j}$ und ist $f_{x_i x_j}$ in \bar{c} stetig, dann existiert auch $f_{x_j x_i}$ in \bar{c} , und es ist $f_{x_i x_j}(\bar{c}) = f_{x_j x_i}(\bar{c})$.

Den Beweis hierzu führt man leicht auf den vorhergehenden Satz zurück.

Wir befassen uns jetzt mit *Differentiellen höherer Ordnung*.

Dazu sei $f(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Das 1. Differential wurde als Funktion $df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die sich darstellen läßt in der Form

$$df := \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

wobei die dx_i als konstant anzusehen sind.

Wir berechnen (definieren) jetzt das 2. Differential von f wie folgt.

$$\begin{aligned} d^2 f &:= d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right) \\ &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_n \quad (dx_i \text{ konstant !}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_n\right) dx_1 + \dots \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_n\right) dx_n \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_n dx_1 + \dots \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_1 dx_n + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_n dx_n \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} dx_1 dx_1 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} dx_n dx_1 + \dots \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} dx_1 dx_n + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} dx_n dx_n \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} dx_n^2 \quad (i \neq j). \end{aligned}$$

Sind die gemischten Ableitungen gleich, dann gilt

$$d^2 f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Analog definiert man induktiv

$$d^{n+1} f := d(d^n f).$$

(Hierbei ist der Satz von Schwarz sehr nützlich.)

Beispiel.

8/2/5

Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Folglich ist

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 2x dx + 2y dy.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = \\ &= 2dx^2 + 2dy^2, \end{aligned}$$

und schließlich

$$d^3 f = 0, \quad (\text{denn alle dritten partiellen Ableitungen sind null}).$$