

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Satz 7.11 (Satz von Taylor)

7/2/9

Sei I ein Intervall und $a \in I$. Ist f in I $(n+1)$ -mal differenzierbar, dann gibt es für jedes $x \in I$ ein $\vartheta (= \vartheta(x))$ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_n(x), \quad \text{wobei}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{(n+1)}.$$

($R_n(x)$ heißt Lagrange'sches Restglied, $p(x) := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$ heißt Taylorpolynom, wobei $f^{(0)}(x) := f(x)$, und $f(x) = p(x) + R_n(x)$ heißt Taylorsche Formel.)

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Es sei jetzt M eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 , $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $f \in C^{k+1}(M)$. Weiterhin seien $\bar{a} = (a_1, a_2)$, $\bar{c} = \bar{a} + t \cdot \bar{h}$, wobei $t \in [0, 1]$, $\bar{h} = (h_1, h_2)$ und die Verbindungsstrecke $s(\bar{a}, \bar{b})$ ganz zu M gehöre. Dann ist

$$\varphi(t) := f(\bar{a} + t\bar{h}) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1$$

eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen, deren Ableitung sich gemäß der Kettenregel wie folgt berechnet

$$\varphi'(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{c}) \cdot h_1 + \frac{\partial}{\partial y} f(\bar{c}) \cdot h_2.$$

Für $\frac{\partial}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial y}$ schreiben wir kurz D_1 bzw. D_2 . Damit ergibt sich

$$\varphi'(t) = h_1 \cdot D_1 f + h_2 \cdot D_2 f = (h_1 D_1 + h_2 D_2) f,$$

wobei das Argument von f der Einfachheit halber weggelassen wurde.

Für $n = 2$ ist dann

$$\varphi''(t) = h_1(h_1 D_1 D_1 f + h_2 D_2 D_1 f) + h_2(h_1 D_1 D_2 f + h_2 D_2 D_2 f).$$

Nach dem Satz von Schwarz ist $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$ und somit erhält man für $D_i D_i := D_i^2$, $i = 1, 2$,

$$\varphi''(t) = h_1^2 D_1^2 f + 2h_1 h_2 D_1 D_2 f + h_2^2 D_2^2 f.$$

In Analogie zur binomischen Formel schreiben wir für $h_1^2 D_1^2 f + 2h_1 h_2 D_1 D_2 f + h_2^2 D_2^2 f$ im folgenden auch $(h_1 D_1 + h_2 D_2)^{(2)} f$.

Analog erhält man für $\varphi^{(k)}(t)$, $0 \leq t \leq 1$, die Darstellung

$$\varphi^{(k)}(t) = (h_1 D_1 + h_2 D_2)^{(k)} f.$$

(Beweis induktiv über k)

Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{m+1}(M)$ und sind $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\bar{a} + t \cdot \bar{h}$ mit $0 \leq t \leq 1$ und $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$ Elemente aus M , deren Verbindungsstrecke ganz zu M gehört, und ist $\varphi(t) = f(\bar{a} + t\bar{h}) = f(a_1 + th_1, \dots, a_n + th_n)$, dann ist

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n h_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(\bar{a} + t\bar{h}).$$

Schreibt man D_i für $\frac{\partial}{\partial x_i}$, so erhält man

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n h_i D_i f \quad \text{und} \quad \varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^n h_i h_j D_i D_j f \\ &= (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(2)} f, \end{aligned}$$

wenn man den Satz von Schwarz und eine der binomischen Formel (für n Summanden) analoge Schreibweise benutzt.

Induktiv zeigt man schließlich

$$\varphi^{(k)}(t) = (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(k)} f.$$

Jetzt sind wir in der Lage, den Taylorsche Satz in übersichtlicher Weise zu formulieren.

Satz 8.12 (Satz von Taylor für Funktionen mit n Veränderlichen)

8/3/11

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$, U eine offene Umgebung von \bar{c} und $f \in C^{m+1}(U)$. Sei $\bar{x} \in U$, so daß die Verbindungsstrecke von \bar{c} und \bar{x} ganz zu U gehört. Für $\bar{x} - \bar{c} = (x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n) := (h_1, \dots, h_n) = \bar{h}$ gilt dann: Es gibt ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß $f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(i)} f(\bar{c}) + R_m(\bar{x})$, wobei

$$R_m(\bar{x}) = \frac{1}{(m+1)!} \cdot (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(m+1)} f(\bar{c} + \vartheta \bar{h}).$$

Beweis. Sei $\varphi(t) := f(\bar{c} + t\bar{h})$, $0 \leq t \leq 1$. Dann ist $\varphi(t)$ als reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen offenbar $(m+1)$ -mal differenzierbar. Nach dem Taylorschen Satz für Funktionen einer Veränderlichen gibt es ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} \cdot (1-0)^i + \frac{\varphi^{(m+1)}(0 + \vartheta(1-0))}{(m+1)!} \cdot (1-0)^{m+1} \\ &= \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} + \frac{\varphi^{(m+1)}(\vartheta)}{(m+1)!}.\end{aligned}$$

Es ist

$$\varphi(1) = f(\bar{x}), \quad \varphi(0) = f(\bar{a}), \quad \varphi^{(i)}(0) = (h_1 D_1 + \cdots + h_n D_n)^{(i)} f(\bar{c})$$

für $i = 1, \dots, m$ und

$$\varphi^{(m+1)}(\vartheta) = (h_1 D_1 + \cdots + h_n D_n)^{(m+1)} f(\bar{c} + \vartheta \bar{h}).$$

Hieraus folgt die Behauptung. \square