

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

**Beweis.** Nach der Taylorschen Formel gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und für jedes  $x \in I$ :

7/2/13

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) \implies$$

$$f(x) - p_n(x) = R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Folglich gilt

$$p_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x),$$

und da  $(p_n(x))$  die Folge der Partialsummen von  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$  ist, erhält man

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i. \quad \square$$

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

**Korollar.**

8/3/13

- (1) Für  $m = 0$  liefert der Satz von Taylor (wie für Funktionen mit einer Veränderlichen) den Mittelwertsatz als Spezialfall.
- (2) Für  $m = 1$ ,  $n = 2$  und  $\bar{a} = (a, b)$ ,  $\bar{x} = (x, y)$ ,  $\bar{h} = \bar{x} - \bar{a} = (x-a, y-b)$  und  $\bar{u} := \bar{a} + \vartheta \bar{h}$  erhält man

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(\bar{a}) \cdot (x-a) + f_y(\bar{a}) \cdot (y-b) + \frac{1}{2!} \left( f_{xx}(\bar{u}) \cdot (x-a)^2 + 2f_{xy}(\bar{u}) \cdot (x-a)(y-b) + f_{yy}(\bar{u}) \cdot (y-b)^2 \right).$$

- (3) Gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes 8.12, daß  $f \in C^\infty(M)$  (d.h.,  $f$  ist in  $M$  beliebig oft differenzierbar), dann läßt sich  $f$  in eine Potenzreihe (mit mehreren Veränderlichen) entwickeln.

$$\text{Wenn } R_m(\bar{x}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \text{ so ist } f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} (h_1 D_1 + \cdots + h_n D_n)^{(i)} f(\bar{a}).$$

**Beweis.** (1) und (2) sind trivial; (3) zeigt man wie im eindimensionalen Fall.  $\square$

8/3/14