

## Kapitel 6

### Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ; Funktionen mit mehreren Veränderlichen

#### 6.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Definition.** (*Kurve*)

6/3/1

$\mathfrak{k}$  ist eine *Kurve* in  $\mathbb{R}^n$

$\overline{\text{Df}}$  Es gibt ein abgeschlossenes Intervall  $[a, b]$  mit  $a < b$  und eine stetige Vektorfunktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so daß  $\mathfrak{k} := \{f(t) : a \leq t \leq b\}$ .

(D.h., es gibt stetige Funktionen  $f_1, \dots, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$  und  $\mathfrak{k}$  das Bild der Funktion  $f$  in  $\mathbb{R}^n$  ist.)

Diese Darstellung der Kurve heißt auch *Parameterdarstellung* mit Hilfe des *Parameterintervalls*  $[a, b]$ . Die Stetigkeit ist notwendig, damit die Kurve zu einer „durchgezogenen“ Linie wird.

6/3/2

Zwei Punkte  $\bar{a}, \bar{b}$  werden durch die Kurve  $\mathfrak{k}$  *verbunden*, wenn  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{k}$ .

## Kapitel 7

### Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

#### 7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

**Satz 7.9** (*1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung*)

7/2/2

Ist  $a < b$  und  $f$  in  $[a, b]$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar, dann gibt es ein  $c \in (a, b)$ , so daß  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ .

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

**Beweis.** Wir betrachten zunächst eine Parameterdarstellung

8/3/2

$$g(t) := \bar{b} + t(\bar{b} - \bar{a}), \quad t \in [0, 1]$$

von  $s(\bar{a}, \bar{b})$  und definieren damit die Funktion  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft

$$F(t) := f(g(t)).$$

Offenbar ist  $F$  in  $[0, 1]$  stetig und in  $(0, 1)$  differenzierbar. Dann läßt sich auf  $F$  der 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden. Folglich existiert ein  $\xi \in (0, 1)$ , so daß

$$F'(\xi) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = F(1) - F(0).$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} F(1) - F(0) &= f(\underbrace{g(1)}_{=\bar{b}}) - f(\underbrace{g(0)}_{=\bar{a}}) = f(\bar{b}) - f(\bar{a}) \\ &= F'(\xi) = f'(\underbrace{g(\xi)}_{:=\bar{c}}) \cdot \underbrace{g'(\xi)}_{=\bar{b}-\bar{a}} \\ &= f'(\bar{c}) \cdot (\bar{b} - \bar{a}). \quad \square \end{aligned}$$