

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

7.2 Mittelwertsätze; der Satz von Taylor

Satz 7.11 (Satz von Taylor)

7/2/9

Sei I ein Intervall und $a \in I$. Ist f in I $(n+1)$ -mal differenzierbar, dann gibt es für jedes $x \in I$ ein $\vartheta (= \vartheta(x))$ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_n(x), \quad \text{wobei}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{(n+1)}.$$

($R_n(x)$ heißt Lagrange'sches Restglied, $p(x) := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i$ heißt Taylorpolynom, wobei $f^{(0)}(x) := f(x)$, und $f(x) = p(x) + R_n(x)$ heißt Taylorsche Formel.)

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.2 Partielle Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung

Satz 8.9 (Satz von Schwarz)

8/2/2

Es sei $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$.

Ist f in einer Umgebung $U(\bar{c})$ definiert und existieren in $U(\bar{c})$ die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xy} und ist f_{xy} in \bar{c} stetig, dann existiert auch f_{yx} in \bar{c} , und es ist $f_{xy}(\bar{c}) = f_{yx}(\bar{c})$.

(Unter den angegebenen Bedingungen sind die gemischten Ableitungen in \bar{c} gleich.)

8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Satz 8.13 (Notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums)

8/3/18

Sei $f(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung von \bar{c} definiert und in \bar{c} nach allen Variablen partiell differenzierbar.

Besitzt f in \bar{c} ein lokales Extremum, dann sind alle (ersten) partiellen Ableitungen von f in \bar{c} null.

(Wenn $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = 0$ für $i = 1, \dots, n$, also $\text{grad} f(\bar{c}) = \bar{0}$, dann heißt \bar{c} auch kritischer oder stationärer Punkt von f .)

Beispiel.

8/3/20

Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$. Wir berechnen die kritischen Stellen von f . Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x = 0 \implies x = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y = 0 \implies y = 0.$$

Die einzige kritische Stelle ist $(0, 0)$. Höchstens dort kann f ein lokales Extremum besitzen.

Literaturhinweise

- [4] Endl, K. und W. Luh: Analysis I u. II. Eine integrierte Darstellung. Aula-Verlag, Wiesbaden. 11/1/4