

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Satz 8.14 (Hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums)

8/3/22

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$ und f sei in einer Umgebung von \bar{c} zweimal stetig differenzierbar.

Weiterhin sei \bar{c} ein kritischer Punkt von f und $D = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{c}) & f_{xy}(\bar{c}) \\ f_{xy}(\bar{c}) & f_{yy}(\bar{c}) \end{vmatrix}$.

Dann gilt:

- (1) Ist $D > 0$, dann besitzt f in \bar{c} ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Minimum, falls $f_{xx}(\bar{c}) > 0$ und ein lokales Maximum, falls $f_{xx}(\bar{c}) < 0$.
- (2) Ist $D < 0$, dann besitzt f in \bar{c} einen sog. Sattelpunkt (das ist ein kritischer Punkt, in dem die betrachtete Funktion weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum besitzt; vgl. Abb. 8.11).
- (3) Ist $D = 0$, dann läßt sich (allein mit Hilfe der zweiten partiellen Ableitungen) noch keine Aussage treffen.

Die folgende Abbildung zeigt eine Funktion mit Sattelpunkt.

8/3/24

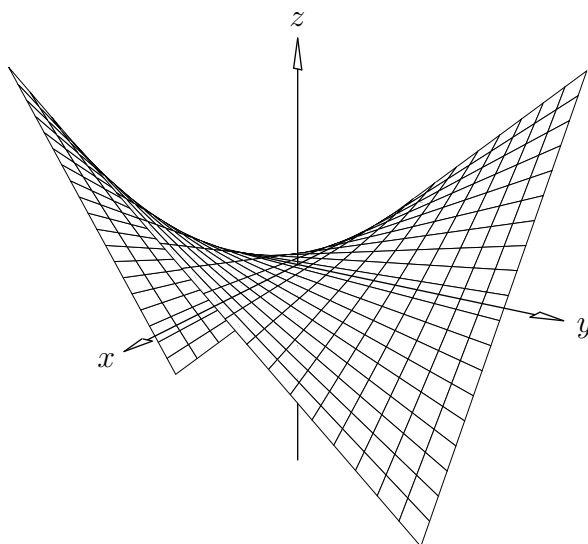


Abb. 8.11

In der Abbildung ist die Funktion $f(x, y) = -xy$ dargestellt. f besitzt in $(0, 0)$ einen Sattelpunkt. Der Graph der Funktion erzeugt eine sog. *Sattelfläche*.

In den Quadranten, in denen x und y jeweils nur positive bzw. nur negative Werte annehmen, ist die Funktion $f(x, y)$ stets negativ, in den Quadranten, wo jeweils ein Wert positiv und ein Wert negativ ist, ist die Funktion positiv. Entlang der x -Achse und der y -Achse ist die Funktion stets null.

Die dargestellte Fläche läßt sich offenbar allein durch Geraden erzeugen.