

## Kapitel 8

### Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

#### 8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

**Satz 8.10** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung mit mehreren Veränderlichen) 8/3/1

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $M$  differenzierbare Funktion. Weiterhin seien  $\bar{a}, \bar{b} \in M$  und die Verbindungsstrecke  $s(\bar{a}, \bar{b})$  zwischen  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$  gehöre zu  $M$ . Dann gibt es ein  $\bar{c} \in s(\bar{a}, \bar{b})$  mit  $\bar{c} \neq \bar{a}, \bar{b}$ , so daß  $f(\bar{b}) - f(\bar{a}) = f'(\bar{c}) \cdot (\bar{b} - \bar{a})$ .

**Satz 8.11** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  in  $M$  differenzierbar. 8/3/5  
Dann gilt:  $f$  ist konstant in  $M \iff f'(\bar{x}) = 0$  für alle  $\bar{x} \in M$ .

**Beweis.** ( $\longrightarrow$ ) trivial, da die partiellen Ableitungen von konstanten Funktionen null sind.

8/3/6

( $\longleftarrow$ ) Es sei  $f'(\bar{x}) = 0$  für jedes  $\bar{x} \in M$  und es seien  $\bar{a}, \bar{b} \in M$ . Dann gibt es nach Voraussetzung Elemente  $\bar{a}_0 = \bar{a}, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{m+1} = \bar{b}$  in  $M$ , so daß  $s(\bar{a}_i, \bar{a}_{i+1}) \in M$  für  $i = 0, \dots, m$ .

Nach dem Mittelwertsatz existiert stets ein  $\bar{c}_i \in s(\bar{a}_i, \bar{a}_{i+1})$  mit  $\bar{c}_i \neq \bar{a}_i, \bar{a}_{i+1}$ , so daß

$$f(\bar{a}_{i+1}) - f(\bar{a}_i) = \underbrace{f'(\bar{c}_i)}_{=0} \cdot (\bar{a}_{i+1} - \bar{a}_i) = 0,$$

also ist  $f(\bar{a}_{i+1}) = f(\bar{a}_i)$  für alle  $i$  und damit  $f(\bar{a}) = f(\bar{b})$  für beliebige  $\bar{a}, \bar{b} \in M$ .

□