

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Einführung)

8.3 Der Satz von Taylor; lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Wir werden jetzt einige Ergebnisse aus der Differentialrechnung für Funktionen mit einer Veränderlichen auf Funktionen mit mehreren Veränderlichen erweitern. Wir beginnen zunächst mit dem Mittelwertsatz, der sich auch hier als Spezialfall des Taylorschen Satzes erweist. 8/3/0

Satz 8.10 (*Mittelwertsatz der Differentialrechnung mit mehreren Veränderlichen*) 8/3/1

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine in M differenzierbare Funktion. Weiterhin seien $\bar{a}, \bar{b} \in M$ und die Verbindungsstrecke $s(\bar{a}, \bar{b})$ zwischen \bar{a} und \bar{b} gehöre zu M . Dann gibt es ein $\bar{c} \in s(\bar{a}, \bar{b})$ mit $\bar{c} \neq \bar{a}, \bar{b}$, so daß $f(\bar{b}) - f(\bar{a}) = f'(\bar{c}) \cdot (\bar{b} - \bar{a})$.

Beweis. Wir betrachten zunächst eine Parameterdarstellung 8/3/2

$$g(t) := \bar{b} + t(\bar{b} - \bar{a}), \quad t \in [0, 1]$$

von $s(\bar{a}, \bar{b})$ und definieren damit die Funktion $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F(t) := f(g(t)).$$

Offenbar ist F in $[0, 1]$ stetig und in $(0, 1)$ differenzierbar. Dann läßt sich auf F der 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden. Folglich existiert ein $\xi \in (0, 1)$, so daß

$$F'(\xi) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = F(1) - F(0).$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} F(1) - F(0) &= f(\underbrace{g(1)}_{=\bar{b}}) - f(\underbrace{g(0)}_{=\bar{a}}) = f(\bar{b}) - f(\bar{a}) \\ &= F'(\xi) = f'(\underbrace{g(\xi)}_{:=\bar{c}}) \cdot \underbrace{g'(\xi)}_{=\bar{b}-\bar{a}} \\ &= f'(\bar{c}) \cdot (\bar{b} - \bar{a}). \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung. Für Vektorfunktionen ist der Mittelwertsatz im allgemeinen falsch. 8/3/3
Man betrachte das Beispiel $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = (x^2, x^3)$.

Offenbar gibt es kein $c \in (0, 1)$, so daß $f(1) - f(0) = f'(c) \cdot (1 - 0) = (2c, 3c^2)$.

Definition. (*polygonzusammenhängend; Gebiet*)

8/3/4

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

(1) M ist *polygonzusammenhängend*

$\overline{\text{Df}}$ Zu je zwei Punkten $\bar{a}, \bar{b} \in M$ gibt es endlich viele Elemente $\bar{a}_0 = \bar{a}, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{m+1} = \bar{b}$, so daß die Verbindungsstrecken $s(\bar{a}_i, \bar{a}_{i+1})$ zwischen \bar{a}_i und \bar{a}_{i+1} , $i = 1, \dots, m$, stets zu M gehören.
(Da durch Polygonzüge stetige Funktionen gegeben sind, sind polygonzusammenhängende Mengen auch bogenzusammenhängend.)

(2) M ist ein *Gebiet*

$\overline{\text{Df}}$ M ist polygonzusammenhängend und offen.

Satz 8.11 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ in M differenzierbar.

8/3/5

Dann gilt: f ist konstant in $M \iff f'(\bar{x}) = 0$ für alle $\bar{x} \in M$.

Beweis. (\longrightarrow) trivial, da die partiellen Ableitungen von konstanten Funktionen null sind.

8/3/6

(\longleftarrow) Es sei $f'(\bar{x}) = 0$ für jedes $\bar{x} \in M$ und es seien $\bar{a}, \bar{b} \in M$. Dann gibt es nach Voraussetzung Elemente $\bar{a}_0 = \bar{a}, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{m+1} = \bar{b}$ in M , so daß $s(\bar{a}_i, \bar{a}_{i+1}) \in M$ für $i = 0, \dots, m$.

Nach dem Mittelwertsatz existiert stets ein $\bar{c}_i \in s(\bar{a}_i, \bar{a}_{i+1})$ mit $\bar{c}_i \neq \bar{a}_i, \bar{a}_{i+1}$, so daß

$$f(\bar{a}_{i+1}) - f(\bar{a}_i) = \underbrace{f'(\bar{c}_i)}_{=0} \cdot (\bar{a}_{i+1} - \bar{a}_i) = 0,$$

also ist $f(\bar{a}_{i+1}) = f(\bar{a}_i)$ für alle i und damit $f(\bar{a}) = f(\bar{b})$ für beliebige $\bar{a}, \bar{b} \in M$.

□

Beispiel. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, wobei

8/3/7

$$f(x, y) = \arctan \frac{x}{y} + \arctan \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad D(f) = \{(x, y) : x \neq 0, y \neq 0\}.$$

Folglich ist f in den Gebieten

$$M_1 := \{(x, y) : x > 0, y > 0\},$$

$$M_2 := \{(x, y) : x > 0, y < 0\},$$

$$M_3 := \{(x, y) : x < 0, y > 0\},$$

$$M_4 := \{(x, y) : x < 0, y < 0\}$$

definiert und offenbar differenzierbar. In jedem der Gebiete gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ &= \frac{y^2}{(y^2 + x^2) \cdot y} - \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2) \cdot x^2} = 0.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Folglich ist $f'(\bar{x}) = 0$, und damit ist f in jedem der M_i konstant. Die Werte von f kann man leicht durch geeignete spezielle Argumente ermitteln.

In M_1 ist $f(x, y) = f(1, 1) = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$,

in M_2 ist $f(x, y) = f(1, -1) = 2 \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$,

in M_3 ist $f(x, y) = f(-1, 1) = 2 \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$,

in M_4 ist $f(x, y) = f(-1, -1) = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$.

Es soll jetzt der Taylorsche Satz für Funktionen mit mehreren Veränderlichen verallgemeinert werden. Dies erfordert einen gewissen technischen Aufwand, den wir durch eine geeignete Schreibweise etwas reduzieren wollen.

8/3/8

Definition. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in M definiert.

8/3/9

(1) f heißt in M *stetig differenzierbar*

$\overline{\text{Df}}$ f ist in M differenzierbar und f' ist in M stetig.

(Dies ist nach dem Satz 8.2 genau dann der Fall, wenn alle partiellen Ableitungen von f in M vorhanden und stetig sind.)

(2) f ist in M $(k+1)$ -mal *stetig differenzierbar*

$\overline{\text{Df}}$ $f^{(k)}$ ist in M stetig differenzierbar.

Bez.: $f \in C^{k+1}(M)$.

Es sei jetzt M eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 , $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $f \in C^{k+1}(M)$. Weiterhin seien $\bar{a} = (a_1, a_2)$, $\bar{c} = \bar{a} + t \cdot \bar{h}$, wobei $t \in [0, 1]$, $\bar{h} = (h_1, h_2)$ und die Verbindungsstrecke $s(\bar{a}, \bar{b})$ ganz zu M gehöre. Dann ist

8/3/10

$$\varphi(t) := f(\bar{a} + t\bar{h}) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1$$

eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen, deren Ableitung sich gemäß der Kettenregel wie folgt berechnet

$$\varphi'(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{c}) \cdot h_1 + \frac{\partial}{\partial y} f(\bar{c}) \cdot h_2.$$

Für $\frac{\partial}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial y}$ schreiben wir kurz D_1 bzw. D_2 . Damit ergibt sich

$$\varphi'(t) = h_1 \cdot D_1 f + h_2 \cdot D_2 f = (h_1 D_1 + h_2 D_2) f,$$

wobei das Argument von f der Einfachheit halber weggelassen wurde.

Für $n = 2$ ist dann

$$\varphi''(t) = h_1(h_1 D_1 D_1 f + h_2 D_2 D_1 f) + h_2(h_1 D_1 D_2 f + h_2 D_2 D_2 f).$$

Nach dem Satz von Schwarz ist $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$ und somit erhält man für $D_i D_i := D_i^2$, $i = 1, 2$,

$$\varphi''(t) = h_1^2 D_1^2 f + 2h_1 h_2 D_1 D_2 f + h_2^2 D_2^2 f.$$

In Analogie zur binomischen Formel schreiben wir für $h_1^2 D_1^2 f + 2h_1 h_2 D_1 D_2 f + h_2^2 D_2^2 f$ im folgenden auch $(h_1 D_1 + h_2 D_2)^{(2)} f$.

Analog erhält man für $\varphi^{(k)}(t)$, $0 \leq t \leq 1$, die Darstellung

$$\varphi^{(k)}(t) = (h_1 D_1 + h_2 D_2)^{(k)} f.$$

(Beweis induktiv über k)

Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{m+1}(M)$ und sind $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\bar{a} + t \cdot \bar{h}$ mit $0 \leq t \leq 1$ und $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$ Elemente aus M , deren Verbindungsstrecke ganz zu M gehört, und ist $\varphi(t) = f(\bar{a} + t\bar{h}) = f(a_1 + th_1, \dots, a_n + th_n)$, dann ist

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n h_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(\bar{a} + t\bar{h}).$$

Schreibt man D_i für $\frac{\partial}{\partial x_i}$, so erhält man

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n h_i D_i f \quad \text{und} \quad \varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^n h_i h_j D_i D_j f \\ &= (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(2)} f, \end{aligned}$$

wenn man den Satz von Schwarz und eine der binomischen Formel (für n Summanden) analoge Schreibweise benutzt.

Induktiv zeigt man schließlich

$$\varphi^{(k)}(t) = (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(k)} f.$$

Jetzt sind wir in der Lage, den Taylorsche Satz in übersichtlicher Weise zu formulieren.

Satz 8.12 (*Satz von Taylor für Funktionen mit n Veränderlichen*)

8/3/11

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$, U eine offene Umgebung von \bar{c} und $f \in C^{m+1}(U)$. Sei $\bar{x} \in U$, so daß die Verbindungsstrecke von \bar{c} und \bar{x} ganz zu U gehört. Für $\bar{x} - \bar{c} = (x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n) := (h_1, \dots, h_n) = \bar{h}$ gilt dann: Es gibt ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit

$0 < \vartheta < 1$, so daß $f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(i)} f(\bar{c}) + R_m(\bar{x})$, wobei

$$R_m(\bar{x}) = \frac{1}{(m+1)!} \cdot (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(m+1)} f(\bar{c} + \vartheta \bar{h}).$$

Beweis. Sei $\varphi(t) := f(\bar{c} + t\bar{h})$, $0 \leq t \leq 1$. Dann ist $\varphi(t)$ als reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen offenbar $(m+1)$ -mal differenzierbar. Nach dem Taylorschen Satz für Funktionen einer Veränderlichen gibt es ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß 8/3/12

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} \cdot (1-0)^i + \frac{\varphi^{(m+1)}(0 + \vartheta(1-0))}{(m+1)!} \cdot (1-0)^{m+1} \\ &= \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} + \frac{\varphi^{(m+1)}(\vartheta)}{(m+1)!}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\varphi(1) = f(\bar{x}), \quad \varphi(0) = f(\bar{a}), \quad \varphi^{(i)}(0) = (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(i)} f(\bar{c})$$

für $i = 1, \dots, m$ und

$$\varphi^{(m+1)}(\vartheta) = (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(m+1)} f(\bar{c} + \vartheta \bar{h}).$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Korollar.

8/3/13

- (1) Für $m = 0$ liefert der Satz von Taylor (wie für Funktionen mit einer Veränderlichen) den Mittelwertsatz als Spezialfall.
- (2) Für $m = 1$, $n = 2$ und $\bar{a} = (a, b)$, $\bar{x} = (x, y)$, $\bar{h} = \bar{x} - \bar{a} = (x - a, y - b)$ und $\bar{u} := \bar{a} + \vartheta \bar{h}$ erhält man

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + f_x(\bar{a}) \cdot (x - a) + f_y(\bar{a}) \cdot (y - b) + \\ &\quad \frac{1}{2!} \left(f_{xx}(\bar{u}) \cdot (x - a)^2 + 2f_{xy}(\bar{u}) \cdot (x - a)(y - b) + f_{yy}(\bar{u}) \cdot (y - b)^2 \right). \end{aligned}$$

- (3) Gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes 8.12, daß $f \in C^\infty(M)$ (d.h., f ist in M beliebig oft differenzierbar), dann läßt sich f in eine Potenzreihe (mit mehreren Veränderlichen) entwickeln.

$$\text{Wenn } R_m(\bar{x}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \text{ so ist } f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} (h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^{(i)} f(\bar{a}).$$

Beweis. (1) und (2) sind trivial; (3) zeigt man wie im eindimensionalen Fall. □

8/3/14

Beispiel. Sei $f(x, y) = e^{x+y}$ und $\bar{a} = (a, b) = (0, 0)$.

8/3/15

Dann ist $D_1 f(x, y) = e^{x+y}$ und $D_2 f(x, y) = e^{x+y}$. Folglich ist f beliebig oft stetig partiell differenzierbar und es ist $D_i^k D_j^m f(x, y) = e^{x+y}$ und somit insbesondere $D_i^k D_j^m f(0, 0) = 1$ für $i, j \in \{1, 2\}$.

Wegen $h_1 = x - 0 = x$, $h_2 = y - 0 = y$ und $(h_1 D_1 + h_2 D_2)^{(m)} f(0, 0) = (x + y)^m$ gilt

$$e^{x+y} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot (x + y)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i y^{m-i} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i+j=m} \frac{1}{i!j!} \cdot x^i y^j.$$

(Man hätte diese Reihe natürlich auch anders gewinnen können.)

Wir befassen uns jetzt mit lokalen Extrema bei Funktionen mit zwei und mehr Veränderlichen. 8/3/16

In den Sätzen 7.15 und 7.16 sind (für differenzierbare Funktionen mit einer Veränderlichen) gewisse Bedingungen für das Vorliegen eines lokalen Extremums an einer Stelle c angegeben worden; und zwar eine notwendige Bedingung: $f'(c) = 0$ und eine hinreichende Bedingung: $f''(c) \neq 0$.

Ähnliche, wenn auch kompliziertere, Bedingungen gibt es auch für Funktionen mit zwei (und mehr) Veränderlichen, mit denen wir uns jetzt befassen.

Definition. (*lokales Extremum*) 8/3/17

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und \bar{c} ein innerer Punkt von $D(f)$.

f besitzt an der Stelle \bar{c} ein *relatives* oder *lokales Extremum* ($:=$ *lokales Minimum* bzw. *lokales Maximum*)

$\overline{\text{Def}}$ Es gibt eine Umgebung $U(\bar{c})$, so daß für jedes $\bar{x} \in U(\bar{c})$ mit $\bar{x} \neq \bar{c}$ gilt:

$f(\bar{x}) > f(\bar{c})$ für ein lokales Minimum und

$f(\bar{x}) < f(\bar{c})$ für ein lokales Maximum.

Satz 8.13 (*Notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums*) 8/3/18

Sei $f(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung von \bar{c} definiert und in \bar{c} nach allen Variablen partiell differenzierbar.

Besitzt f in \bar{c} ein lokales Extremum, dann sind alle (ersten) partiellen Ableitungen von f in \bar{c} null.

(Wenn $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) = 0$ für $i = 1, \dots, n$, also $\text{grad} f(\bar{c}) = \bar{0}$, dann heißt \bar{c} auch *kritischer* oder *stationärer Punkt* von f .)

Beweis. Habe o.B.d.A. f in \bar{c} ein lokales Minimum (für ein lokales Maximum verläuft der Beweis analog). 8/3/19

Dann gibt es eine Umgebung $U(\bar{c})$, so daß für jedes $\bar{x} \in U(\bar{c})$ mit $\bar{x} \neq \bar{c}$ gilt: $f(\bar{x}) > f(\bar{c})$. Dies gilt insbesondere für $\bar{x} := \bar{c} + h\bar{e}_i$, wenn h hinreichend klein ist.

Nach Voraussetzung ist die Funktion $\varphi(h) := f(\bar{c} + h\bar{e}_i)$ (als Funktion von h) in $h = 0$ differenzierbar, und es ist $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c})$.

Offenbar besitzt φ (als Funktion einer Veränderlichen) in 0 ein lokales Minimum. Folglich gilt nach Satz 7.15:

$$\varphi'(\bar{0}) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{c}) \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad \square$$

Beispiel.

8/3/20

Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$. Wir berechnen die kritischen Stellen von f . Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x = 0 \implies x = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y = 0 \implies y = 0.$$

Die einzige kritische Stelle ist $(0, 0)$. Höchstens dort kann f ein lokales Extremum besitzen.

Im eindimensionalen Fall haben wir eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums mit Hilfe des Taylorschen Satzes bewiesen. Analoge Überlegungen führen auch bei Funktionen mit mehreren Veränderlichen zum Ziel. Wir beschränken uns hier auf Funktionen mit zwei Veränderlichen, da der technische Aufwand für den n -dimensionalen Fall nicht unerheblich ist.

8/3/21

Ist $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$, U eine Umgebung von $\bar{c} = (a, b)$, f zweimal stetig differenzierbar in U und $\bar{x} = (x, y)$ hinreichend dicht bei \bar{c} , dann gilt nach dem Satz von Taylor (für $m = 1$, $n = 2$, $\bar{h} = \bar{x} - \bar{a} = (x - a, y - b) := (h, k)$ und $\bar{u} := \bar{a} + \vartheta \bar{h}$)

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = f_x(\bar{c}) \cdot h + f_y(\bar{c}) \cdot k + \frac{1}{2} \left(f_{xx}(\bar{u}) \cdot h^2 + 2f_{xy}(\bar{u}) \cdot hk + f_{yy}(\bar{u}) \cdot k^2 \right). \quad (\star)$$

Sind die notwendigen Bedingungen für das Vorliegen eines lokalen Extremums erfüllt, d.h., $f_x(\bar{c}) = f_y(\bar{c}) = 0$, dann erhält man

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{1}{2} \left(h^2 \cdot f_{xx}(\bar{u}) + 2hk \cdot f_{xy}(\bar{u}) + k^2 \cdot f_{yy}(\bar{u}) \right) = R_1(\bar{x}).$$

Ob f an der Stelle \bar{c} ein lokales Extremum besitzt, hängt allein von dem Restglied ab. Aufgrund der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen in U wechseln diese in einer hinreichend kleinen Umgebung von \bar{c} ihr Vorzeichen nicht, falls sie an der Stelle \bar{c} von null verschieden sind. Dies nutzen wir aus, um ein handhabbares Kriterium zur Verfügung zu haben.

Satz 8.14 (Hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums)

8/3/22

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$ und f sei in einer Umgebung von \bar{c} zweimal stetig differenzierbar.

Weiterhin sei \bar{c} ein kritischer Punkt von f und $D = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{c}) & f_{xy}(\bar{c}) \\ f_{xy}(\bar{c}) & f_{yy}(\bar{c}) \end{vmatrix}$.

Dann gilt:

- (1) Ist $D > 0$, dann besitzt f in \bar{c} ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Minimum, falls $f_{xx}(\bar{c}) > 0$ und ein lokales Maximum, falls $f_{xx}(\bar{c}) < 0$.
- (2) Ist $D < 0$, dann besitzt f in \bar{c} einen sog. Sattelpunkt (das ist ein kritischer Punkt, in dem die betrachtete Funktion weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum besitzt; vgl. Abb. 8.11).
- (3) Ist $D = 0$, dann läßt sich (allein mit Hilfe der zweiten partiellen Ableitungen) noch keine Aussage treffen.

Beweis. Wir benutzen die gleichen Bezeichnungen wie in der obigen Formel (\star) . Da 8/3/23 nach Voraussetzung $f_x(\bar{c})$ und $f_y(\bar{c})$ null sind, erhält man aus (\star)

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{1}{2} \left(h^2 \cdot f_{xx}(\bar{u}) + 2hk \cdot f_{xy}(\bar{c}) + k^2 \cdot f_{yy}(\bar{u}) \right) = R_1(\bar{x}).$$

(1). Nach Voraussetzung ist

$$D := D(\bar{c}) = f_{xx}(\bar{c}) \cdot f_{yy}(\bar{c}) - f_{xy}^2(\bar{c}) > 0.$$

Betrachtet man $D(\bar{u})$ als Funktion von $\bar{u} = \bar{c} + \vartheta(\bar{x} - \bar{c})$, dann ist wegen $f \in C^2(U)$ die Funktion $D(\bar{u})$ in U stetig und somit $D(\bar{u}) > 0$, falls \bar{x} hinreichend nahe bei \bar{c} liegt.

Analog gilt für $f_{xx}(\bar{c}) \lesssim 0$ auch $f_{xx}(\bar{u}) \lesssim 0$.

Im folgenden schreiben wir für $f_{xx}(\bar{u})$, $f_{xy}(\bar{u})$, $f_{yy}(\bar{u})$ kurz f_{xx} , f_{xy} , f_{yy} .

Da f_{xx} nicht null ist, erhält man

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - f(\bar{c}) &= \frac{1}{2f_{xx}} \cdot [h^2 f_{xx}^2 + hk f_{xx} f_{xy} + k^2 f_{xx} f_{yy}] \\ &= \frac{1}{2f_{xx}} \left[\underbrace{(h f_{xx} + k f_{yy})^2}_{\geq 0} + k^2 \underbrace{(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)}_{> 0} \right]. \end{aligned}$$

Da der Ausdruck in den eckigen Klammern für $k \neq 0$ positiv ist, hängt das Vorzeichen von $f(\bar{x}) - f(\bar{c})$ nur von $f_{xx}(\bar{c})$ ab. (Für $k = 0$ gilt nach (\star) schon $f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{h^2}{2} \cdot f_{xx}(\bar{c})$.)

Also für $f_{xx}(\bar{c}) > 0$ besitzt f an der Stelle \bar{c} ein lokales Minimum und für $f_{xx}(\bar{c}) < 0$ ein lokales Maximum.

(2). Sei $D < 0$. Setzt man $h = k$ bzw. $h = -k$, dann erhält man

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{h^2}{2} \cdot (f_{xx} + 2f_{xy} + f_{yy}) \quad \text{bzw.}$$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{h^2}{2} \cdot (f_{xx} - 2f_{xy} + f_{yy}).$$

Es sei zunächst $f_{xx}(\bar{c}) = f_{yy}(\bar{c}) = 0$.

Wegen $D(\bar{c}) < 0$ ist dann $f_{xy}(\bar{c}) \neq 0$ und somit

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} 2f_{xy}(\bar{c}), \text{ falls } h = k \text{ und}$$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} -2f_{xy}(\bar{c}), \text{ falls } h = -k.$$

Dies bedeutet, daß in jeder Umgebung von \bar{c} sowohl positive als auch negative Werte von $f(\bar{x}) - f(\bar{c})$ auftreten. Folglich besitzt f in \bar{c} kein lokales Extremum.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, daß $f_{xx}(\bar{c}) \neq 0$ oder $f_{yy}(\bar{c}) \neq 0$.

Sei o.B.d.A. $f_{xx}(\bar{c}) \neq 0$. Dann erhält man für $k = 0$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{h^2}{2} \cdot f_{xx}.$$

Für hinreichend nahe bei \bar{c} gelegene \bar{x} haben $f(\bar{x}) - f(\bar{c})$ und $f_{xx}(\bar{c})$ das gleiche Vorzeichen.

Sei jetzt $h = -s \cdot f_{xy}(\bar{c})$ und $k = s \cdot f_{xx}(\bar{c})$ für „kleine“ $s \neq 0$. Dann gilt

$$f(\bar{x}) - f(\bar{c}) = \frac{s^2}{2} \left(f_{xy}^2(\bar{c}) \cdot f_{xx} - 2f_{xy}(\bar{c}) \cdot f_{xx}(\bar{c}) \cdot f_{xy} + f_{xx}^2(\bar{c}) \cdot f_{yy} \right).$$

Wegen $f \in C^2(U)$ gilt

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - f(\bar{c}) &\xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{c}} \frac{s^2}{2} \left(f_{xy}^2(\bar{c}) \cdot f_{xx}(\bar{c}) - 2f_{xy}^2(\bar{c}) \cdot f_{xx}(\bar{c}) + f_{xx}^2(\bar{c}) \cdot f_{yy}(\bar{c}) \right) \\ &= \frac{s^2}{2} \cdot f_{xx}(\bar{c}) \cdot \underbrace{\left(f_{xx}(\bar{c}) \cdot f_{yy}(\bar{c}) - f_{xy}^2(\bar{c}) \right)}_{< 0}. \end{aligned}$$

Folglich haben $f(\bar{x}) - f(\bar{c})$ und $f_{xx}(\bar{c})$ unterschiedliches Vorzeichen, und damit besitzt f in \bar{c} kein lokales Extremum.

Den Fall $f_{yy}(\bar{c}) \neq 0$ beweist man durch ähnliche Überlegungen. \square

Die folgende Abbildung zeigt eine Funktion mit Sattelpunkt.

8/3/24

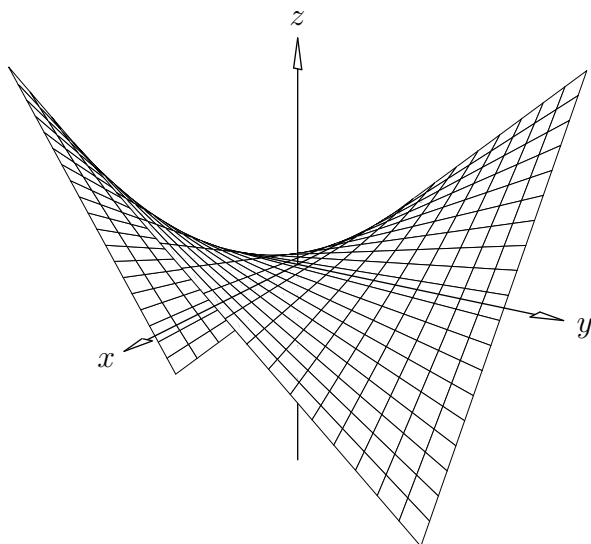


Abb. 8.11

In der Abbildung ist die Funktion $f(x, y) = -xy$ dargestellt. f besitzt in $(0, 0)$ einen Sattelpunkt. Der Graph der Funktion erzeugt eine sog. *Sattelfläche*.

In den Quadranten, in denen x und y jeweils nur positive bzw. nur negative Werte annehmen, ist die Funktion $f(x, y)$ stets negativ, in den Quadranten, wo jeweils ein Wert positiv und ein Wert negativ ist, ist die Funktion positiv. Entlang der x -Achse und der y -Achse ist die Funktion stets null.

Die dargestellte Fläche läßt sich offenbar allein durch Geraden erzeugen.

Wir fahren jetzt fort mit der Untersuchung unseres Beispiels. Hierzu benutzen wir das oben erhaltene Kriterium. 8/3/25

Offenbar sind die zweiten partiellen Ableitungen an der kritischen Stelle $(0, 0)$ stetig. Denn es ist

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 2,$$

und damit gilt

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{0}) & f_{xy}(\bar{0}) \\ f_{xy}(\bar{0}) & f_{yy}(\bar{0}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Wegen $f_{xx}(\bar{0}) = 2 > 0$ besitzt f in $\bar{0}$ ein lokales Extremum (vgl. auch Abb. 8.5 und Abb. 8.8 b).

Wir betrachten jetzt das Beispiel $f(x, y) = x^2 - y^2$. 8/3/26

Die folgende Abbildung zeigt diese Funktion; sie stellt ebenfalls eine Sattelfläche dar, die an der Stelle $(0, 0)$ einen Sattelpunkt besitzt.

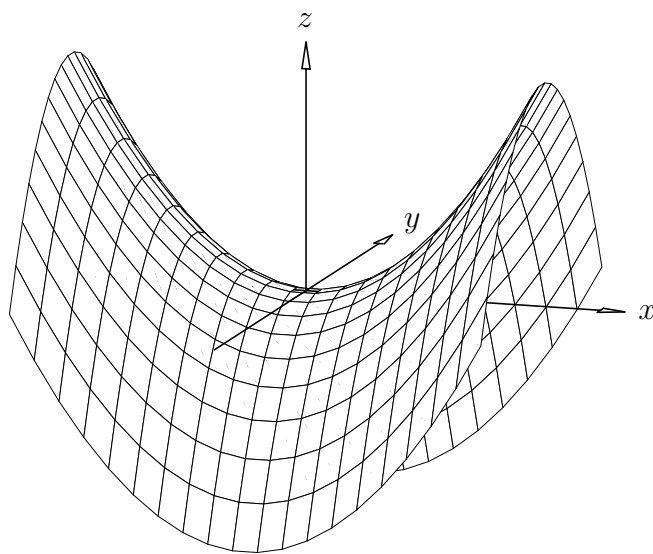


Abb. 8.12

Die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ besitzt an der Stelle $(0, 0)$ einen Sattelpunkt. Der Graph von f stellt eine Sattelfläche dar.

Es ist

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = -2y,$$

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = -2.$$

Dann ist $\bar{0}$ wieder ein kritischer Punkt von f , aber

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

folglich besitzt f in $\bar{0}$ einen Sattelpunkt.

Bemerkung. Nach unserer Definition sind die Extremstellen einer Funktion f immer innere Punkte des betrachteten Definitionsbereiches (man kann dies auch anders definieren!). Ist man nicht nur an lokalen sondern auch an absoluten (oder globalen) Extrema (im Gegensatz zu lokalen Extremstellen) interessiert, dann muß noch der Teil des Randes des Definitionsbereiches untersucht werden, der selbst zum Definitionsbereich gehört. Schränkt man die Funktion f auf den betreffenden Teil des Randes ein, dann erhält man (in Abhängigkeit von der Kompliziertheit des Randes) oft eine „handhabbare“ Funktion g mit einer Veränderlichen. Die lokalen und globalen Extrema für g (falls solche existieren) müssen dann mit den lokalen Extrema von f verglichen werden.

8/3/27